

Explorando Sistemas Dinámicos y Composición de Funciones: De la Recurrencia a los Atractores

Matemáticas | Cálculo | Aprendizaje Basado en Problemas

Descripción

En este plan de clase, los estudiantes de media explorarán la composición de funciones de variable real, enfocándose especialmente en la composición de una función consigo misma. A través de la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas, descubrirán cómo esta composición da lugar a sistemas dinámicos discretos, que modelan fenómenos recurrentes y autosimilares en la naturaleza y tecnología.

Los estudiantes analizarán ejemplos sencillos y luego se adentrarán en casos históricos y relevantes como el Atractor de Lorenz y el estudio del Cao, que ejemplifican la importancia de estos conceptos en la comprensión de comportamientos complejos en ciencias y matemáticas aplicadas. Este aprendizaje les permitirá desarrollar habilidades para ejecutar cálculos, interpretar resultados y visualizar fenómenos, fortaleciendo su pensamiento crítico y su capacidad para resolver problemas reales.

Además, el plan conecta el contenido teórico con situaciones cotidianas y científicas, mostrando la relevancia del cálculo y la matemática avanzada en la vida actual y futura de los estudiantes, preparándolos para estudios superiores y aplicaciones prácticas en diversas áreas.

Objetivos de Aprendizaje

- Ejecutar cálculos y algoritmos de composición de funciones para resolver problemas matemáticos y científicos relacionados con sistemas dinámicos discretos.
- Analizar los resultados obtenidos al aplicar la composición de funciones consigo mismas y explicar su significado en contextos de recurrencia y autosimilitud.
- Observar y describir fenómenos representados por sistemas dinámicos, estableciendo estrategias visuales para facilitar su comprensión.
- Relacionar propiedades y resultados históricos de sistemas dinámicos con aplicaciones reales como el Atractor de Lorenz y el estudio del Cao.

Recursos Necesarios

- Computadoras o tablets con acceso a internet y software de gráficos (GeoGebra o Desmos).
- Pizarras y marcadores.
- Proyector para mostrar videos y simulaciones.
- Material impreso con ejemplos y ejercicios de composición de funciones y sistemas dinámicos.

- Videos cortos relacionados con atractores y sistemas dinámicos (3-5 minutos).
- Calculadoras científicas.
- Hojas de trabajo para ejercicios y reflexión.

Requisitos Previos

- Conocimiento básico de funciones de variable real y operaciones con ellas.
- Habilidad para realizar composiciones simples de funciones.
- Conceptos elementales de sucesiones y recurrencias.
- Experiencia en graficar funciones en plano cartesiano.
- Actitudes de observación y análisis crítico.

Actividades

Sesión 1: Introducción a la Composición de Funciones y Sistemas Dinámicos Discretos

Fase de Inicio

Tiempo estimado:

10 minutos

Propósito de la sesión:

Presentar la composición de funciones y su importancia en la modelación de fenómenos recurrentes y autosimilares.

Activación de conocimientos previos:

Docente: "¿Recuerdan cómo se compone una función? Por ejemplo, si tenemos $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2$, ¿cómo calculamos $f(g(3))$?"

Estudiantes: Resuelven la composición y comparten sus respuestas brevemente.

Motivación y enganche:

Docente: "¿Sabían que al componer una función consigo misma muchas veces, podemos crear patrones que aparecen en la naturaleza, como los movimientos del clima o el crecimiento de ciertas plantas? Hoy exploraremos cómo estas ideas matemáticas describen fenómenos reales."

Contextualización:

Docente: "Comprenderemos sistemas dinámicos que modelan desde la predicción del clima hasta la dinámica poblacional, conectando la matemática con el mundo real que nos rodea."

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado:

45 minutos

Presentación del contenido:

Docente: Introduce brevemente la composición de una función consigo misma ($f^n(x)$) y define sistema dinámico discreto como la iteración de funciones en pasos discretos.

Actividad 1: Explorando la composición de funciones consigo mismas

- **Objetivo:** Ejecutar composiciones de funciones y observar patrones.
- **Instrucciones:** En parejas, usarán la función $f(x) = x^2 - 1$ para calcular $f(x)$, $f(f(x))$ y $f(f(f(x)))$ con valores iniciales dados (por ejemplo, $x=0$, $x=1$, $x=2$). Registrar resultados y observar patrones numéricos.
- **Organización:** Parejas
- **Producto:** Tabla con resultados y observaciones sobre la recurrencia.
- **Tiempo:** 20 minutos
- **Rol docente:** Supervisar, hacer preguntas como "¿Qué observan en los valores? ¿Creen que la secuencia se estabiliza, crece o cambia? ¿Por qué?"

Actividad 2: Visualizando sistemas dinámicos discretos

- **Objetivo:** Observar la representación gráfica de funciones iteradas y relacionar con sistemas dinámicos.
- **Instrucciones:** Individualmente, los estudiantes usarán GeoGebra o Desmos para graficar la función $f(x) = x^2 - 1$ y sus iteraciones sucesivas con puntos iniciales dados. Identificarán si los valores convergen, divergen o presentan ciclos.
- **Organización:** Individual
- **Producto:** Captura de pantalla o dibujo del gráfico y breve descripción escrita de lo observado.
- **Tiempo:** 25 minutos
- **Rol docente:** Guiar en el uso del software, preguntar "¿Qué patrones visuales encuentran? ¿Se parecen a algo conocido?"

Diferenciación:

- **Para estudiantes avanzados:** Proponer analizar funciones más complejas o probar diferentes valores iniciales.
- **Para estudiantes con dificultades:** Proporcionar ejemplos guiados con pasos detallados y apoyo directo en el uso del software o cálculo manual.

Transición:

Docente: "Ahora que conocemos cómo funciona la composición y sus gráficos, en la próxima sesión exploraremos cómo estos sistemas aparecen en fenómenos reales y descubriremos atractores famosos."

Fase de Cierre

Tiempo estimado:

5 minutos

Síntesis:

En plenaria, cada pareja menciona una observación clave de sus tablas y gráficos, destacando patrones de recurrencia o comportamiento.

Reflexión metacognitiva:

- ¿Cómo cambia el valor de la función al iterarla? ¿Qué significa esto para un sistema dinámico?
- ¿Qué dificultades encontraron al graficar y calcular las composiciones?
- ¿Cómo creen que estos conceptos pueden ayudar a entender fenómenos reales?

Retroalimentación:

Docente: Comentarios positivos sobre las observaciones realizadas, aclaración de dudas y refuerzo de conceptos clave.

Transferencia:

Docente: "En la próxima sesión, aplicaremos estos conocimientos para analizar sistemas dinámicos importantes que explican fenómenos naturales complejos."

Sesión 2: Explorando la Recurrencia y Autosimilitud en Sistemas Dinámicos

Fase de Inicio**Tiempo estimado:**

10 minutos

Propósito de la sesión:

Revisar conceptos previos y presentar la recurrencia y autosimilitud en sistemas dinámicos discretos.

Activación de conocimientos previos:

Docente: "¿Recuerdan cómo las iteraciones de una función pueden generar patrones? ¿Pueden dar ejemplos o describir qué pasó con la función que vimos la sesión pasada?"

Estudiantes: Comparten ejemplos y resumen de la sesión anterior.

Motivación y enganche:

Docente: Muestra imágenes de fractales y patrones autosimilares en la naturaleza (helechos, costas, etc.) y pregunta: "¿Cómo creen que las matemáticas explican estos patrones?"

Contextualización:

Docente: "Estudiaremos cómo la composición de funciones explica estos patrones y qué significa la autosimilitud en sistemas dinámicos."

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado:

45 minutos

Presentación del contenido:

Docente: Introduce la idea de recurrencia y autosimilitud con ejemplos sencillos, como la función logística y su iteración.

Actividad 1: Análisis de la función logística

- **Objetivo:** Ejecutar iteraciones de la función logística y observar comportamiento recurrente y autosimilar.
- **Instrucciones:** En grupos, calcularán $f(x)=rx(1-x)$ para $r=2.5$ y diferentes valores iniciales, iterando 5 veces y registrando resultados. Luego discutirán qué patrones observan.
- **Organización:** Grupos de 3-4
- **Producto:** Tabla de iteraciones y breve reporte de patrones observados.
- **Tiempo:** 25 minutos
- **Rol docente:** Facilitar cálculos, preguntar "¿Qué pasa con los valores? ¿Se estabilizan o varían mucho? ¿Por qué?"

Actividad 2: Visualización de autosimilitud en fractales simples

- **Objetivo:** Observar visualmente la autosimilitud y relacionarla con iteraciones de funciones.
- **Instrucciones:** Usando videos o simulaciones en línea, los estudiantes observarán fractales como el conjunto de Cantor y el triángulo de Sierpinski, y discutirán qué significa que se "repita" la forma.
- **Organización:** Plenaria y discusión en grupos
- **Producto:** Mapa mental colectivo en la pizarra sobre autosimilitud y recurrencia.
- **Tiempo:** 20 minutos
- **Rol docente:** Guiar observaciones, conectar con iteraciones vistas y conceptos matemáticos.

Diferenciación:

- **Avanzados:** Investigar otras funciones que generan patrones autosimilares.
- **Apoyo:** Uso de gráficos impresos y explicaciones paso a paso de la función logística.

Transición:

Docente: "Mañana exploraremos ejemplos históricos que usaron estos conceptos para entender fenómenos reales complejos."

Fase de Cierre

Tiempo estimado:

5 minutos

Síntesis:

Resumen grupal de qué es recurrencia y autosimilitud con ejemplos mencionados.

Reflexión metacognitiva:

- ¿Qué patrones recurrentes encontraron en la función logística?
- ¿Cómo se relaciona la autosimilitud con la función que iteramos?
- ¿Pueden pensar en otros fenómenos naturales donde se observe esto?

Retroalimentación:

Docente: Comentarios sobre comprensión y aclaración de conceptos.

Transferencia:

Docente: "En la próxima sesión, conoceremos aplicaciones históricas y científicas muy importantes de estos conceptos."

Sesión 3: Propiedades y Aplicaciones Históricas: Atractor de Lorenz y Estudio del Cao

Fase de Inicio

Tiempo estimado:

10 minutos

Propósito de la sesión:

Introducir atractores y su relevancia en sistemas dinámicos reales.

Activación de conocimientos previos:

Docente: Pregunta: "¿Recuerdan qué es un sistema dinámico discreto? ¿Qué significa que un patrón sea autosimilar?"

Estudiantes: Responden y discuten brevemente.

Motivación y enganche:

Docente: Presenta un video corto (3 minutos) sobre el Atractor de Lorenz y su importancia en la predicción del clima.

Contextualización:

Docente: "Hoy conoceremos cómo matemáticos y científicos usaron la composición de funciones para resolver problemas reales y descubrir fenómenos complejos en la naturaleza."

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado:

45 minutos

Presentación del contenido:

Docente: Explica las características del Atractor de Lorenz y el Estudio del Cao, relacionándolos con sistemas dinámicos y composición de funciones.

Actividad 1: Análisis guiado del Atractor de Lorenz

- **Objetivo:** Comprender el concepto de atractor y su relación con sistemas dinámicos.
- **Instrucciones:** En grupos, analizarán imágenes y gráficos del Atractor de Lorenz, responderán preguntas guía como: ¿Qué significa que un sistema sea caótico? ¿Cómo la composición de funciones puede generar estos patrones?
- **Organización:** Grupos de 3-4
- **Producto:** Respuestas escritas y presentación breve de sus conclusiones.
- **Tiempo:** 25 minutos
- **Rol docente:** Facilitar la discusión, aclarar conceptos y conectar con conocimientos previos.

Actividad 2: Relación con el Estudio del Cao

- **Objetivo:** Observar cómo la composición y sistemas dinámicos se aplican en investigaciones científicas recientes.
- **Instrucciones:** Presentar resumen sencillo del Estudio del Cao (texto y gráfica). Discusión en plenaria sobre la importancia de las propiedades descubiertas.
- **Organización:** Plenaria
- **Producto:** Resumen colectivo en la pizarra de aplicaciones y conclusiones.
- **Tiempo:** 20 minutos
- **Rol docente:** Guiar discusión y asegurar comprensión.

Diferenciación:

- **Avanzados:** Profundizar en el análisis matemático del atractor.
- **Apoyo:** Uso de videos y material visual para facilitar comprensión.

Transición:

Docente: "Para cerrar nuestro aprendizaje, reflexionaremos sobre la importancia de estos conceptos y cómo podemos usarlos en distintos contextos."

Fase de Cierre

Tiempo estimado:

5 minutos

Síntesis:

Mapa conceptual grupal sobre atractores, sistemas dinámicos y aplicaciones.

Reflexión metacognitiva:

- ¿Qué es un atractor y por qué es importante?
- ¿Cómo la composición de funciones ayuda a entender sistemas complejos?
- ¿Qué aplicaciones reales conocen que usen estos conceptos?

Retroalimentación:

Docente: Comentarios sobre participación y comprensión, aclaración de dudas.

Transferencia:

Docente: "En la próxima sesión aplicaremos lo aprendido para resolver retos y problemas concretos usando composición de funciones."

Sesión 4: Aplicación Práctica y Resolución de Problemas con Sistemas Dinámicos

Fase de Inicio

Tiempo estimado:

10 minutos

Propósito de la sesión:

Preparar a los estudiantes para aplicar sus conocimientos en la resolución de problemas reales y simulados.

Activación de conocimientos previos:

Docente: Pregunta: "¿Cuáles son las ideas clave que aprendimos sobre composición de funciones y sistemas dinámicos?"

Estudiantes: Responden y resumen brevemente.

Motivación y enganche:

Docente: Presenta un problema real: "Supongamos que queremos modelar la población de una especie usando un sistema dinámico discreto. ¿Cómo lo haríamos?"

Contextualización:

Docente: Explica que resolverán problemas similares usando composición y análisis de funciones iteradas.

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado:

45 minutos

Actividad 1: Resolución de problema de población con función logística

- **Objetivo:** Ejecutar cálculos y analizar resultados de composición para modelar población.
- **Instrucciones:** En parejas, calculan iteraciones de $f(x) = 3.2x(1-x)$ para valores iniciales dados, interpretan resultados y discuten estabilidad y comportamiento.
- **Organización:** Parejas
- **Producto:** Tabla de iteraciones y explicación escrita de resultados.
- **Tiempo:** 25 minutos
- **Rol docente:** Supervisar, guiar análisis, preguntar "¿Qué indica la estabilidad o inestabilidad en la población? ¿Qué pasa si cambia el valor de r ?"

Actividad 2: Creación de visualización y conclusión

- **Objetivo:** Observar y representar visualmente resultados para facilitar la comprensión.
- **Instrucciones:** Cada pareja crea un gráfico en GeoGebra o Desmos con sus datos, presenta brevemente sus conclusiones al grupo.
- **Organización:** Parejas y plenaria
- **Producto:** Gráficos y presentación oral breve.
- **Tiempo:** 20 minutos
- **Rol docente:** Facilitar uso de software, apoyar presentaciones y consolidar aprendizajes.

Diferenciación:

- **Avanzados:** Explorar el cambio de parámetros y analizar caos y bifurcaciones.
- **Apoyo:** Uso de tablas y calculadora para realizar iteraciones manuales.

Fase de Cierre

Tiempo estimado:

5 minutos

Síntesis:

Ticket de salida: cada estudiante escribe en una tarjeta tres aprendizajes clave sobre composición y sistemas dinámicos y una pregunta que aún tenga.

Reflexión metacognitiva:

- ¿Cómo me ayudó la composición de funciones a entender el problema planteado?
- ¿Qué aprendí sobre el comportamiento de sistemas dinámicos?
- ¿Cómo podría aplicar estos conceptos en otros contextos?

Retroalimentación:

Docente: Lee algunas tarjetas en voz alta, ofrece comentarios positivos y orienta dudas para el futuro aprendizaje.

Transferencia:

Docente: Invita a seguir explorando sistemas dinámicos en cursos futuros y en la vida cotidiana.

Tarea o reto:

Investigar otro sistema dinámico discreto y traer un ejemplo para presentar en clase.

Evaluación

Tipo de evaluación:

- Diagnóstica: Sesión 1, fase de inicio con preguntas sobre composición de funciones.
- Formativa: Durante todas las actividades de desarrollo, mediante observación, preguntas guía y productos parciales (tablas, gráficos, mapas mentales).
- Sumativa: Sesión 4, entrega de productos finales (tablas, gráficos, presentaciones) y ticket de salida para reflexión.

Criterios de evaluación:

- Ejecuta correctamente cálculos y composiciones de funciones (Objetivo 1).
- Analiza e interpreta resultados de iteraciones y sistemas dinámicos (Objetivo 2).
- Observa y utiliza estrategias visuales para entender fenómenos (Objetivo 3).
- Relaciona propiedades matemáticas con aplicaciones históricas y reales (Objetivo 4).

Instrumentos sugeridos:

- Lista de cotejo para evaluar participación y ejecución de cálculos.
- Rúbrica para evaluar análisis y presentación de resultados.
- Observación directa durante actividades grupales e individuales.
- Autoevaluación y coevaluación en reflexiones finales.

Evidencias de aprendizaje:

- Tablas y cálculos de iteraciones de funciones.
- Gráficos y visualizaciones digitales o manuales.
- Mapas mentales y resúmenes colaborativos.
- Respuestas escritas y presentaciones orales sobre atractores y estudios científicos.

- Tickets de salida con reflexiones y preguntas.