

Explorando Límites: Descubre el Comportamiento de las Funciones

Matemáticas | Cálculo | Aprendizaje Basado en Problemas

Descripción

Este plan de clase tiene como propósito que los estudiantes comprendan y apliquen el concepto de límite de funciones, utilizando los teoremas fundamentales para resolver problemas y analizando gráficas que representan estos límites. A través de la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas, los alumnos enfrentarán situaciones reales y simuladas que les permitirán desarrollar pensamiento crítico y habilidades matemáticas esenciales para el estudio del cálculo.

El aprendizaje de los límites es relevante porque es la base para entender conceptos más avanzados en matemáticas y ciencias, como la derivación e integración, y tiene aplicaciones en física, economía y tecnología. Además, al interpretar gráficas, los estudiantes podrán visualizar el comportamiento de funciones y relacionar la teoría con representaciones visuales, fortaleciendo así su comprensión y capacidad para resolver problemas.

Este enfoque activo y centrado en el estudiante promueve la autonomía, la colaboración y el pensamiento analítico, preparando a los jóvenes para retos académicos y cotidianos donde la lógica y el análisis matemático son fundamentales.

Objetivos de Aprendizaje

- Resolver problemas de límite de funciones aplicando los teoremas de límites.
- Analizar gráficamente el cálculo de límites de funciones para interpretar su comportamiento.
- Aplicar el razonamiento crítico para argumentar resultados relacionados con límites.
- Identificar situaciones en contextos reales donde el concepto de límite es relevante.

Recursos Necesarios

- Calculadora científica (1 por estudiante o pareja).
- Computadora o proyector para mostrar gráficas digitales (software GeoGebra o Desmos).
- Hojas de trabajo impresas con problemas y espacios para respuestas (1 por estudiante).
- Pizarrón y marcadores.
- Cuaderno y lápiz para anotaciones.
- Acceso a internet para visualización de videos cortos (opcional).

Requisitos Previos

- Conocimiento básico sobre funciones y sus representaciones gráficas.
- Familiaridad con operaciones algebraicas y manipulación de expresiones.
- Concepto inicial de continuidad y comportamiento de funciones.
- Habilidad para interpretar y dibujar gráficos simples.

Actividades

Fase de Inicio

Tiempo estimado: 10 minutos

Propósito de la sesión:

El docente explica que hoy exploraremos cómo entender el comportamiento de las funciones cuando se acercan a un valor específico, usando límites, una herramienta clave en cálculo. Se enfatiza que esto nos ayudará a resolver problemas y visualizar funciones gráficamente.

Activación de conocimientos previos:

Docente: "¿Recuerdan alguna función que hayan estudiado y cómo se comporta cuando 'x' se acerca a un número? Por ejemplo, ¿qué sucede con la función $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ cuando x se acerca a 1?"

Estudiantes: Responden oralmente o escriben brevemente su opinión.

Motivación y enganche:

Docente: Muestra un video o una animación corta (2 minutos) que presenta una situación real: "Imaginen que una pelota se acerca a una pared, ¿qué distancia tendrá justo antes de tocarla? Esto es parecido a calcular un límite."

Estudiantes: Observan y comentan brevemente la conexión con el concepto de límite.

Contextualización:

Docente: Explica que el cálculo de límites no solo es fundamental en matemáticas sino que se usa para modelar fenómenos físicos, económicos o tecnológicos donde necesitamos entender comportamientos cercanos a un punto.

Estudiantes: Escuchan y hacen preguntas si es necesario.

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado: 40 minutos

Presentación del contenido:

Docente: Presenta brevemente (máximo 5 minutos) los conceptos básicos de límite y los teoremas fundamentales (límites de suma, producto, cociente y teorema del sándwich) usando ejemplos simples, sin hacer una exposición larga. Invita a los estudiantes a descubrir cómo aplicarlos a través de problemas.

Actividad 1: "Explorando límites con gráficos"

- **Objetivo:** Analizar gráficamente el cálculo de límites.
- **Instrucciones:**
 - **Docente:** Divide a los estudiantes en parejas y les entrega hojas con funciones diferentes para graficar (por ejemplo, $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$, $f(x) = \sin(x)/x$, $f(x) = (x - 2)^2/(x - 2)$).
 - Utilizando calculadoras o software (GeoGebra/Desmos), cada pareja grafica su función y observa el comportamiento cerca del punto crítico que deben analizar.
 - Registran sus observaciones: ¿Qué valor parece tomar la función cuando x se acerca al punto? ¿Hay alguna discontinuidad visible?
- **Organización:** Parejas.
- **Producto:** Gráficas impresas o capturas de pantalla con anotaciones y respuestas a las preguntas.
- **Tiempo:** 15 minutos.
- **Rol del docente:** Circula apoyando, haciendo preguntas guía como "¿Qué sucede con la función cuando x se acerca a...? ¿Cómo se refleja esto en la gráfica?"

Actividad 2: "Aplicando teoremas para resolver límites"

- **Objetivo:** Resolver problemas de límite aplicando los teoremas de límites.
- **Instrucciones:**
 - **Docente:** Entrega una hoja con 3 problemas de límite que requieren aplicar diferentes teoremas (por ejemplo, límite de suma, producto y el teorema del sándwich).
 - Los estudiantes trabajan individualmente o en grupos pequeños para calcular los límites apoyándose en los teoremas.
 - Discuten y comparan sus resultados con un compañero cercano.
- **Organización:** Individual o grupos de 3.
- **Producto:** Resolución escrita de los problemas con justificación del teorema aplicado.
- **Tiempo:** 15 minutos.
- **Rol del docente:** Observa el trabajo, formula preguntas como "¿Por qué usaste ese teorema? ¿Qué pasaría si aplicas otro? ¿Cómo sabes que el límite existe?"

Actividad 3: "Argumentando resultados y casos especiales"

- **Objetivo:** Aplicar razonamiento crítico para argumentar resultados relacionados con límites.
- **Instrucciones:**
 - **Docente:** Presenta un caso especial (por ejemplo, límite de una función que no existe o tiene una discontinuidad removible) y pregunta: "¿Por qué este límite no existe o es diferente a lo que la gráfica muestra?"

- En grupos, discuten y escriben una breve explicación argumentando su respuesta, usando vocabulario matemático.
- Comparten sus argumentos con la clase.
- **Organización:** Grupos de 3-4 estudiantes.
- **Producto:** Explicación escrita y presentación oral corta.
- **Tiempo:** 10 minutos.
- **Rol del docente:** Facilita la discusión, pregunta "¿Qué evidencia usaron? ¿Cómo se conecta esto con el teorema del sándwich o continuidad?"

Diferenciación:

- Para estudiantes que terminan antes: Proponer resolver un problema adicional con límite en infinito o límites laterales.
- Para quienes requieren más apoyo: Brindar ejemplos guiados paso a paso y acompañamiento personalizado durante las actividades.

Transiciones:

Al finalizar cada actividad, el docente hace una breve síntesis y conecta el aprendizaje con la siguiente actividad, por ejemplo: "Ahora que vimos cómo graficar para entender el límite, vamos a aplicar los teoremas para resolver casos más complejos."

Fase de Cierre

Tiempo estimado: 10 minutos

Síntesis:

Docente: Solicita a los estudiantes que, individualmente, escriban en una hoja 3 puntos clave que aprendieron sobre límites y su aplicación gráfica y teórica.

Estudiantes: Escriben y luego comparten en plenaria algunas de sus ideas.

Reflexión metacognitiva:

El docente plantea las siguientes preguntas para que los estudiantes respondan por escrito o en voz alta:

- ¿Cómo me ayudaron los teoremas a resolver los problemas de límites?
- ¿Qué utilidad tiene analizar la gráfica para entender el límite de una función?
- ¿En qué situaciones reales puedo aplicar lo que aprendí hoy?

Retroalimentación:

Docente: Comenta y aclara dudas sobre las respuestas de los estudiantes, destacando aciertos y corrigiendo errores conceptuales con ejemplos concretos.

Transferencia:

Docente: Explica que lo aprendido servirá para el próximo tema de derivadas, donde los límites son esenciales para entender cómo cambian las funciones.

Tarea o reto:

Docente: Propone que los estudiantes busquen un ejemplo de límite en su entorno (video, gráfica, fenómeno cotidiano) y expliquen cómo se relaciona con lo aprendido.

Evaluación

Tipo de evaluación: Predominantemente formativa durante la fase de desarrollo y sumativa en el cierre.

Criterios de evaluación:

- Resuelve correctamente problemas de límite aplicando los teoremas de límites (Objetivo 1).
- Interpreta e identifica correctamente el comportamiento del límite a partir de gráficos (Objetivo 2).
- Argumenta con claridad y fundamentación matemática los resultados obtenidos (Objetivo 3).

Instrumentos sugeridos:

- Lista de cotejo para evaluar la correcta aplicación de teoremas en los problemas.
- Observación directa durante actividades grupales y discusión.
- Rúbrica para valorar la claridad y profundidad de las argumentaciones escritas y orales.
- Autoevaluación mediante la reflexión metacognitiva.

Evidencias de aprendizaje:

- Hojas con problemas resueltos y justificados.
- Gráficas anotadas y análisis realizados en parejas.
- Explicaciones escritas y orales en grupo sobre casos especiales.
- Respuestas reflexivas en la fase de cierre.

Enriquecimientos

Inicio - Diagnostico

Evaluación Diagnóstica Inicial: Explorando Límites

Duración: 5-10 minutos

Objetivo: Identificar los conocimientos previos sobre funciones, gráficos y conceptos básicos que ayudarán a abordar el estudio de límites de funciones.

- **Instrucciones para el docente:** Entregar esta evaluación breve al inicio de la sesión para conocer el nivel inicial de los estudiantes. Se puede realizar de forma individual o en parejas para agilizar la actividad.

Preguntas y Actividades

1. Pregunta 1: Conceptos básicos de funciones

¿Qué es una función? Explica con tus propias palabras y da un ejemplo sencillo.

2. Pregunta 2: Interpretación gráfica

Observa la siguiente gráfica de una función $f(x)$ (el docente puede mostrar una gráfica simple, por ejemplo, una parábola o línea recta). Responde:

- ¿Qué valor tiene $f(2)$?
- ¿Qué sucede con los valores de $f(x)$ cuando x se acerca a 1 desde la izquierda?

3. Pregunta 3: Comportamiento cercano a un punto

Si una función $f(x)$ se acerca a 3 cuando x se acerca a 1, ¿qué significa esto? Intenta explicarlo con tus palabras.

4. Pregunta 4: Evaluación simple de límites

Calcula el valor de la siguiente expresión cuando x se acerca a 2:

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)/(x - 2)$ (puede presentarse en formato escrito o verbal)

5. Pregunta 5: Reflexión rápida

¿Por qué crees que es importante entender qué pasa con una función cuando x se acerca a un número, incluso si la función no está definida en ese punto?

Indicadores para el docente

- Comprensión básica de qué es una función y cómo se representa.
- Capacidad para leer valores de funciones a partir de gráficos simples.
- Primeras ideas sobre comportamiento cercano a un punto (concepto intuitivo de límite).
- Habilidad para realizar un cálculo algebraico sencillo relacionado con límites.
- Disposición para expresar la importancia del concepto de límite.

Con esta evaluación diagnóstica, el docente podrá adaptar la explicación y actividades posteriores según el nivel de los estudiantes y focalizar el trabajo en reforzar conceptos necesarios para alcanzar los objetivos del plan.

Desarrollo - Ejemplos

Ejemplos Prácticos y Casos de Estudio para la Sesión: "Explorando Límites: Descubre el Comportamiento de las Funciones"

Para aplicar la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) en una sesión de 1 hora, se proponen dos problemas contextualizados que permitan al estudiante investigar, analizar gráficamente y resolver límites de funciones usando teoremas pertinentes. Estos casos están diseñados para ser trabajados en pequeños grupos o parejas, fomentando la colaboración y la discusión.

Ejemplo Práctico 1: Velocidad Instantánea de una Bicicleta

Situación problemática: Una ciclista está participando en una carrera y su posición en metros después de t segundos está dada por la función:

$$f(t) = (t^2 + 3t) / (t + 1), \text{ con } t \geq 0$$

Problema a resolver: ¿Cuál es la velocidad instantánea de la ciclista en $t = 2$ segundos? Para ello, primero calcule el límite de la tasa de cambio promedio cuando el intervalo de tiempo se acerca a cero.

- Determine el límite de la función que representa la tasa de cambio promedio de la posición en torno a $t=2$.
- Use gráficas para visualizar el comportamiento de la función y la tasa de cambio cerca de $t=2$.
- Aplicar teoremas de límites para justificar el resultado obtenido.

Conexión con los objetivos: Permite aplicar límites para encontrar velocidades instantáneas (concepto fundamental en cálculo), usar teoremas para resolver límites y analizar gráficamente el comportamiento de la función.

Ejemplo Práctico 2: Temperatura Cerca de un Punto Crítico

Situación problemática: La temperatura en grados Celsius de una varilla metálica en función de la distancia x metros desde un extremo está dada por:

$$g(x) = (x^2 - 4) / (x - 2), \text{ para } x \neq 2$$

Problema a resolver: ¿Cuál es la temperatura en el punto $x = 2$? Dado que $g(x)$ no está definida en $x=2$, usa límites para encontrar el valor de la temperatura en ese punto.

- Calcule el límite de $g(x)$ cuando x se acerca a 2.
- Grafique la función para observar el comportamiento cerca de $x=2$ y la discontinuidad.
- Discuta si se puede "extender" la función en $x=2$ para eliminar la discontinuidad.

Conexión con los objetivos: Facilita la comprensión del concepto de límite en puntos de discontinuidad, uso de teoremas para calcular límites y análisis gráfico para interpretar resultados.

Desarrollo de la Sesión con ABP

- Presentar las situaciones problemáticas brevemente y formar grupos de 3-4 estudiantes.
- Cada grupo discute y plantea cómo abordar el problema, calculando límites y graficando (pueden usar calculadora gráfica o software sencillo).
- Guiar a los estudiantes para identificar y aplicar teoremas de límites (suma, producto, cociente, límites laterales si es necesario).
- Promover la reflexión grupal sobre cómo el gráfico confirma el resultado del límite y qué significa en contexto.
- Finalmente, cada grupo comparte conclusiones con el resto de la clase, fomentando la explicación y argumentación matemática.

Desarrollo - Evaluar

Herramientas de Evaluación Formativa para "Explorando Límites: Descubre el Comportamiento de las Funciones"

Las siguientes herramientas están diseñadas para ser rápidas, claras y efectivas, permitiendo al docente monitorear el progreso de los estudiantes en relación con los objetivos de aprendizaje dentro de la sesión de 1 hora. Se alinean con la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas y son apropiadas para estudiantes de 15 a 17 años.

1. Mini Cuestionario de Diagnóstico Rápido (10 minutos)

- **Propósito:** Evaluar la comprensión inicial sobre límites y teoremas asociados.
- **Formato:** 3 preguntas cortas (respuesta numérica o de opción múltiple).
- **Ejemplo de preguntas:**
 - ¿Cuál es el límite de $f(x) = 2x + 3$ cuando x se acerca a 1?
 - ¿Qué significa que el límite de una función exista en un punto?
 - ¿Cuál teorema utilizas para encontrar el límite de una suma de funciones?
- **Uso:** Aplicar al inicio para ajustar la explicación y actividades.

2. Actividad de Resolución Rápida en Pizarra o Papel (15 minutos)

- **Propósito:** Practicar la aplicación de teoremas de límites y cálculo gráfico.
- **Formato:** Presentar 2-3 problemas breves para resolver en grupos pequeños o individualmente, por ejemplo:
 - Calcular el límite de $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ cuando $x \rightarrow 1$ aplicando el teorema de factorización.
 - Interpretar el límite a partir de una gráfica simple (entregada o proyectada).
- **Evaluación:** Revisión rápida con retroalimentación inmediata para corregir conceptualizaciones erróneas.

3. Rúbrica Simplificada de Autoevaluación y Coevaluación (5 minutos)

- **Propósito:** Fomentar reflexión sobre el propio aprendizaje y colaboración.
- **Formato:** Lista corta con criterios simples:
 - Entendí cómo aplicar al menos un teorema de límite.
 - Pude interpretar correctamente una gráfica para encontrar un límite.
 - Participé activamente en la resolución del problema.
- **Uso:** Los estudiantes marcan "Sí" o "No" y comentan brevemente.

4. Preguntas de Reflexión Final en Plenaria (5 minutos)

- **Propósito:** Comprobar comprensión conceptual y conexiones con el problema planteado.
- **Formato:** Preguntas abiertas para responder oralmente o por escrito:
 - ¿Por qué es importante entender el comportamiento de una función cerca de un punto?
 - ¿Qué teorema te ayudó más para resolver el problema y por qué?
- **Evaluación:** El docente toma nota para identificar áreas que requieren refuerzo.

5. Lista de Comprobación para el Docente Durante la Actividad (a lo largo de la sesión)

- ¿Los estudiantes aplican correctamente los teoremas de límites?
- ¿Interpretan adecuadamente las gráficas para deducir límites?
- ¿Participan activamente y plantean preguntas o dudas?
- ¿Resuelven problemas con razonamiento lógico y justificación?

Estas herramientas combinadas permiten un monitoreo continuo y dinámico del progreso hacia los objetivos de resolver problemas aplicando teoremas de límites y analizar gráficos relacionados, dentro de la duración de la sesión.

Desarrollo - Tareas

Tareas Estructuradas para la Fase de Desarrollo

Tarea	Instrucciones	Tiempo Estimado	Producto Esperado	Conexión con Objetivo
Tarea 1: Identificación de Límites a través de Problemas Reales	• Lee el problema propuesto sobre una situación cotidiana donde se necesite calcular el límite (por ejemplo, velocidad instantánea o crecimiento de una planta cerca de un punto específico). • Discute en grupo qué significa encontrar el límite en ese contexto. • Formula una función matemática que represente la situación. • Determina el límite de la función en el punto indicado, aplicando los teoremas de límites que conocen.	20 minutos	• Presentación breve en grupo explicando la función formulada y el límite calculado. • Resolución escrita con aplicación de teoremas de límites.	Resolver problemas de límite de funciones aplicando los teoremas de límites

Tarea 2: Análisis Gráfico del Límite de Funciones	• Observa la gráfica de varias funciones que se proporcionan o que tú mismo construyas con apoyo de una calculadora gráfica o software sencillo. • Identifica visualmente el comportamiento de la función cerca del punto donde se calcula el límite. • Compara el límite calculado algebraicamente con la aproximación gráfica. • Discute en grupo cómo la gráfica ayuda a entender el límite y qué sucede si la función no está definida en ese punto.	25 minutos	• Informe corto con gráficos y explicación del comportamiento de las funciones. • Anotaciones que muestren la comparación entre cálculo algebraico y gráfico.	Analizar mediante la gráfica el cálculo de límite de funciones
Tarea 3: Reflexión y Resolución de Dudas en Grupo	• En equipo, discutan los retos encontrados al aplicar los teoremas y al interpretar las gráficas. • Formulen preguntas para aclarar dudas sobre límites y comportamiento de funciones. • Propongan una conclusión grupal que resuma el aprendizaje sobre cómo calcular y analizar límites.	15 minutos	• Lista de preguntas y respuestas del grupo. • Conclusión escrita o en presentación oral breve.	Integrar el aprendizaje y resolver problemas de límite aplicando teoremas y análisis gráfico

Cierre - Retroalimentar

Estrategias de Retroalimentación para el Cierre

Al finalizar la sesión de 1 hora sobre límites de funciones, es fundamental brindar una retroalimentación que refuerce los aprendizajes, motive la reflexión y oriente a los estudiantes hacia la mejora continua. A continuación, se proponen estrategias específicas, constructivas y adecuadas para estudiantes de 15 a 17 años, alineadas con los objetivos del plan de clase.

• Retroalimentación Individualizada y Constructiva

- Revisar con cada estudiante o grupo pequeño sus soluciones a los problemas planteados, señalando qué pasos aplicaron correctamente en el uso de los teoremas de límites.

- Destacar específicamente las fortalezas, por ejemplo: "Has identificado correctamente el límite usando el teorema de la suma, eso es muy importante".
- Señalar con claridad y amabilidad las áreas de mejora, por ejemplo: "Observa que al analizar la gráfica, podrías prestar más atención a los valores cercanos al punto para estimar mejor el límite".
- Ofrecer una sugerencia concreta para avanzar, por ejemplo: "Para futuros problemas, intenta primero hacer una tabla de valores para complementar el análisis gráfico".

• Retroalimentación Grupal a través de la Discusión

- Invitar a los estudiantes a compartir en voz alta los métodos que utilizaron para resolver un problema, promoviendo la reflexión sobre diferentes estrategias.
- Guiar la discusión para que el grupo identifique en conjunto los aciertos y las dificultades comunes, fomentando un ambiente de aprendizaje colaborativo.
- Concluir resaltando cómo aplicar correctamente los teoremas de límites y el análisis gráfico ayuda a comprender mejor el comportamiento de las funciones.

• Uso de Preguntas Guía para la Autoevaluación

- Proponer preguntas que inviten a los estudiantes a evaluar su propio aprendizaje, tales como:
 - ¿Qué te pareció más sencillo y qué te resultó más difícil al aplicar los teoremas de límites?
 - ¿Cómo te ayudó la gráfica a entender el comportamiento de la función cerca del punto de interés?
 - ¿Qué estrategias podrías usar la próxima vez para mejorar tu análisis?
- Invitar a algunos estudiantes a compartir sus respuestas para enriquecer la reflexión colectiva.

• Resumen Visual y Esquemático

- El docente puede cerrar la sesión con un breve resumen en la pizarra o proyector, resaltando los pasos clave para resolver problemas de límites y cómo interpretar gráficas.
- Utilizar esquemas simples que relacionen los teoremas vistos con ejemplos gráficos.
- Esto ayuda a consolidar el aprendizaje y sirve como referencia visual para los estudiantes.

• Refuerzo Positivo y Motivación

- Reconocer el esfuerzo y la participación activa de los estudiantes durante la sesión.
- Animar a que sigan practicando con problemas de límites y explorando gráficos para afianzar su comprensión.
- Recordar la importancia de estos conceptos para su desarrollo en cálculo y en futuras aplicaciones matemáticas.

Cierre - Rubrica

Rúbrica para Evaluar Resultados Finales: "Explorando Límites: Descubre el Comportamiento de las Funciones"

Criterio	Excelente (4 puntos)	Bueno (3 puntos)	Adecuado (2 puntos)	Insuficiente (1 punto)
----------	----------------------	------------------	---------------------	------------------------

Resolución de problemas aplicando teoremas de límites	Aplica correctamente todos los teoremas de límites relevantes para resolver los problemas, mostrando comprensión sólida y procedimientos claros.	Aplica la mayoría de los teoremas correctamente, con pequeños errores que no afectan la solución general.	Aplica algunos teoremas de manera correcta, pero con errores que afectan parcialmente la solución.	No aplica correctamente los teoremas o la solución es incorrecta o incompleta.
Análisis gráfico del cálculo de límites	Interpreta con precisión las gráficas para identificar el comportamiento del límite, explicando claramente las conclusiones.	Interpreta gráficas adecuadamente, con explicaciones claras aunque con detalles menores poco precisos.	Interpreta parcialmente las gráficas, con explicaciones poco claras o incompletas.	No logra interpretar correctamente las gráficas ni relacionarlas con el cálculo del límite.
Presentación y claridad en la explicación	Explica sus procedimientos y resultados de manera clara, ordenada y lógica, facilitando la comprensión.	Explica sus procedimientos con claridad en general, aunque con algunos puntos poco organizados.	Explicaciones poco claras u organizadas, dificultando la comprensión del proceso seguido.	No logra explicar adecuadamente sus procedimientos ni resultados.
Uso adecuado del lenguaje matemático	Utiliza correctamente terminología matemática apropiada al nivel, demostrando dominio del vocabulario.	Utiliza la mayoría de términos matemáticos correctamente, con algunos errores menores.	Uso limitado o incorrecto de terminología matemática, dificultando la precisión.	No utiliza términos matemáticos adecuados o los usa incorrectamente.

Recomendaciones - Tic_ia

Inicio

- **Herramienta:** Kahoot! (Sustitución)

Implementación: El docente prepara un cuestionario interactivo con preguntas sobre conceptos previos relacionados con funciones y comportamiento cerca de un punto. Los estudiantes responden desde sus dispositivos móviles o computadoras.

Contribución a los objetivos: Activa conocimientos previos de forma rápida y dinámica, fomentando la participación y permitiendo al docente identificar el nivel inicial de comprensión sobre límites.

- **Herramienta:** YouTube o Vimeo - Video animado corto explicativo (Aumento)

Implementación: Presentar un video animado de 2 minutos que ilustre el concepto de límite mediante una situación real (ejemplo: pelota acercándose a una pared). Se recomienda usar videos accesibles y en español para

facilitar la comprensión.

Contribución a los objetivos: Motiva a los estudiantes y establece la conexión entre el concepto matemático y su aplicación en contextos reales, facilitando la comprensión visual del comportamiento cercano a un punto.

Desarrollo

- **Herramienta:** GeoGebra (Modificación)

Implementación: Los estudiantes trabajan en parejas para graficar funciones y explorar visualmente los límites usando la aplicación GeoGebra, disponible en versión web o app para dispositivos móviles. El docente proporciona los ejercicios y guía la exploración interactiva de los gráficos, permitiendo acercarse a puntos críticos y observar comportamientos.

Contribución a los objetivos: Permite analizar gráficamente los límites, facilitando la comprensión visual y la aplicación práctica de los teoremas de límites. Además, promueve el aprendizaje colaborativo y la experimentación.

- **Herramienta:** Wolfram Alpha (Aumento)

Implementación: Como recurso complementario, el docente muestra cómo ingresar funciones y consultar sus límites en Wolfram Alpha. Los estudiantes pueden verificar resultados y explorar diferentes funciones para entender mejor los cálculos.

Contribución a los objetivos: Refuerza la habilidad para resolver problemas de límite y verificar resultados, apoyando el aprendizaje autónomo y la comprensión analítica.

Cierre

- **Herramienta:** ChatGPT o similar (Redefinición)

Implementación: El docente invita a los estudiantes a formular preguntas específicas sobre límites o solicitar explicaciones personalizadas al chatbot. Por ejemplo, pueden pedir ejemplos adicionales, clarificación de conceptos o problemas resueltos paso a paso.

Contribución a los objetivos: Facilita una retroalimentación inmediata y personalizada, permite profundizar en dudas específicas y refuerza la comprensión individual del tema, promoviendo el aprendizaje autónomo y adaptativo.

- **Herramienta:** Padlet o Jamboard (Modificación)

Implementación: Como actividad de reflexión, los estudiantes comparten en un muro digital sus conclusiones sobre el comportamiento de funciones y los límites que analizaron. Pueden incluir capturas de pantalla de sus gráficos, respuestas a preguntas guía o comentarios.

Contribución a los objetivos: Promueve la síntesis y comunicación de los aprendizajes, fomenta la colaboración y el intercambio de ideas, y permite al docente evaluar la comprensión colectiva e individual.