

<h1>Del cuadrado a la función cuadrática: áreas que se transforman</h1>

Matemáticas | Álgebra | Aprendizaje Basado en Problemas

Descripción

Este plan de clase introduce la función cuadrática a partir de una situación geométrica cercana y comprensible: identificar un cuadrilátero con sus cuatro lados iguales, reconocerlo como un cuadrado y calcular su área. A través de un problema relacionado con el diseño de un jardín o una zona de juego, los estudiantes observarán que el área de un cuadrado puede expresarse mediante una multiplicación de factores iguales.

Posteriormente, analizarán qué ocurre cuando el lado del cuadrado se representa con una expresión como $x + 2$. Al calcular el área, descubrirán la expresión $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$, vinculando la representación geométrica con las expresiones polinómicas y con la función cuadrática. El proceso se desarrollará mediante Aprendizaje Basado en Problemas: los estudiantes explorarán, formularán estrategias, justificarán procedimientos y comunicarán sus conclusiones.

La propuesta corresponde al trabajo inicial de la actividad 1 de la secuencia de expresiones polinómicas de tercer grado de secundaria y fortalece conocimientos previos sobre figuras geométricas, área, productos notables, términos algebraicos y evaluación de expresiones. También permitirá comprender que las funciones cuadráticas aparecen en situaciones reales como áreas, trayectorias, diseños, ganancias y movimientos.

Objetivos de Aprendizaje

- Identificar las características de un cuadrilátero cuyos cuatro lados tienen la misma longitud y reconocerlo como un cuadrado.
- Calcular el área de un cuadrado utilizando la fórmula lado por lado y representar el procedimiento con medidas numéricas y algebraicas.
- Expresar el área de un cuadrado cuyo lado mide $x + a$ mediante una expresión polinómica cuadrática.
- Desarrollar y verificar expresiones como $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ mediante modelos geométricos y procedimientos algebraicos.
- Argumentar, de manera oral y escrita, cómo una situación de área puede representarse mediante una función cuadrática.

Recursos Necesarios

- Una figura impresa de un cuadrilátero con cuatro lados iguales y ángulos rectos por equipo.
- Hojas cuadriculadas y hojas blancas, una por estudiante.

- Reglas, escuadras, lápices, colores, marcadores y tijeras.
- Cuadrados de cartulina de 10 cm por 10 cm, uno por equipo.
- Tarjetas con medidas de lados: 3 cm, 5 cm, $x + 1$, $x + 2$ y $x + 3$.
- Hoja de trabajo con el problema central y preguntas guía.
- Pizarrón, plumones y cinta adhesiva.
- Proyector o pantalla para mostrar una imagen de un jardín cuadrado o una zona de juego.
- Calculadora básica, opcional para verificar resultados.
- GeoGebra, opcional, para representar el área cuando cambia el valor de x .

Requisitos Previos

- Reconocer figuras geométricas básicas y distinguir lados, vértices y ángulos.
- Identificar un cuadrilátero como una figura con cuatro lados.
- Calcular el área de rectángulos y cuadrados mediante multiplicación.
- Comprender el significado de una variable y sustituir valores sencillos en una expresión.
- Realizar multiplicaciones de números naturales y aplicar la propiedad distributiva.
- Reconocer términos como monomio, binomio, polinomio y exponente.

Actividades

Sesión 1: El reto del terreno cuadrado

Fase de Inicio

Tiempo estimado: 10 minutos.

Propósito de la sesión: Reconocer las características de un cuadrado y relacionar su forma con el cálculo de áreas, preparando el camino para expresar el área mediante lenguaje algebraico.

Activación de conocimientos previos: observar y clasificar

Docente: Entrega a cada equipo una imagen con varias figuras: un rectángulo, un rombo, un trapecio, un cuadrado y un cuadrilátero irregular. Solicita que respondan en su hoja:

- ¿Cuáles de las figuras tienen cuatro lados?
- ¿Cuál de ellas tiene todos sus lados iguales?
- ¿Es suficiente que una figura tenga cuatro lados iguales para afirmar que es un cuadrado? ¿Qué otra característica observan?

Estudiantes: Observan, comparan, miden con la regla cuando sea necesario y escriben una respuesta inicial. Después comparten sus conclusiones con un compañero.

Motivación y contextualización

Docente: Presenta la situación: “La escuela quiere cubrir con pasto una zona de juegos con forma de cuadrado. El encargado necesita saber cuántos metros cuadrados debe comprar. Antes de calcular, debemos comprobar qué tipo de figura es”. Pregunta: **¿Qué datos necesitamos conocer para calcular la superficie?**

Estudiantes: Proponen respuestas como medir un lado, conocer el largo y el ancho o multiplicar lado por lado. El docente registra las ideas sin corregirlas todavía y explica que durante la clase deberán justificar cuál procedimiento funciona y por qué.

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado: 45 minutos.

Presentación del contenido mediante ABP: El docente plantea el problema central sin presentar de inmediato la fórmula: “Un terreno tiene forma de cuadrilátero. Sus cuatro lados miden 6 m y sus ángulos son rectos. ¿Cómo podemos demostrar qué figura es y calcular su área?”. Los estudiantes investigan con sus conocimientos previos, construyen una representación y explican su estrategia.

Actividad 1. ¿Qué figura es?

Objetivo específico: Identificar un cuadrilátero con cuatro lados iguales y reconocerlo como cuadrado.

Organización: Equipos de 3 o 4 estudiantes. **Tiempo:** 12 minutos.

- **Docente:** Entrega la tarjeta del terreno y pregunta: “¿Qué información confirma que la figura es un cuadrilátero?”.
- **Estudiantes:** Cuentan los lados y vértices, miden el dibujo y anotan que tiene cuatro lados.
- **Docente:** Pregunta: “¿Qué información indica que los lados son iguales? ¿Qué función cumplen los ángulos rectos?”.
- **Estudiantes:** Comparan las medidas y elaboran una conclusión: “Es un cuadrado porque tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos”.
- **Docente:** Solicita que dibujen un cuadrado de lado 6 cm y marquen sus características.

Producto: Dibujo rotulado y explicación escrita de por qué la figura es un cuadrado.

Rol docente: Observa si los estudiantes confunden rombo con cuadrado y pregunta: “¿Un rombo siempre tiene ángulos rectos? ¿Qué diferencia observan?”.

Actividad 2. Calculamos el área del terreno

Objetivo específico: Calcular el área de un cuadrado y justificar la fórmula lado por lado.

Organización: Parejas. **Tiempo:** 15 minutos.

- **Docente:** Entrega una hoja cuadriculada y plantea: “Representen el cuadrado de lado 6 unidades. ¿Cuántas unidades cuadradas caben dentro?”.
- **Estudiantes:** Dibujan el cuadrado, cuentan filas y columnas y escriben la multiplicación correspondiente.
- **Docente:** Pregunta: “¿Por qué podemos multiplicar 6 por 6? ¿Qué representan ambos 6?”.

- **Estudiantes:** Explican que una medida representa las filas y la otra las columnas. Concluyen que el área es $6 \times 6 = 36$ unidades cuadradas.
- **Docente:** Generaliza con preguntas: “Si el lado mide l , ¿cómo expresarían el área? ¿Qué significa l^2 ?”.

Producto: Representación cuadrículada, operación numérica y fórmula $A = l^2$.

Actividad 3. El lado que cambia

Objetivos específicos: Representar algebraicamente el área y relacionarla con una expresión cuadrática.

Organización: Equipos de 3 o 4 estudiantes. **Tiempo:** 18 minutos.

- **Docente:** Presenta el reto: “El terreno se ampliará. Ahora cada lado medirá $x + 2$ metros. ¿Cuál será su área?”.
- **Estudiantes:** Dibujan un cuadrado y escriben $x + 2$ en cada lado.
- **Docente:** Pregunta: “¿Qué operación representa el área antes de desarrollar la expresión?”.
- **Estudiantes:** Escriben $(x + 2)(x + 2)$ o $(x + 2)^2$.
- **Docente:** Solicita dividir el cuadrado en cuatro regiones: un cuadrado de área x^2 , dos rectángulos de área $2x$ cada uno y un cuadrado de área 4.
- **Estudiantes:** Suman las regiones y obtienen $x^2 + 2x + 2x + 4 = x^2 + 4x + 4$.
- **Docente:** Pide comprobar el resultado usando $x = 3$: el lado es 5 y el área debe ser 25.

Producto: Modelo geométrico coloreado y desarrollo de $(x + 2)^2$.

Transición: El docente indica: “Ya descubrimos cómo una figura produce un polinomio. En la siguiente sesión veremos cómo los valores de x cambian el área y cómo podemos representar esa relación como función”.

Diferenciación

- **Para quienes necesitan apoyo:** proporcionar un esquema del cuadrado dividido en cuatro regiones, tarjetas con las etiquetas x^2 , $2x$, $2x$ y 4 , además de permitir el uso de valores numéricos antes de generalizar.
- **Para quienes terminan antes:** solicitar que desarrollen $(x + 3)^2$ con un modelo geométrico y expliquen qué patrón observan en los coeficientes.

Fase de Cierre

Tiempo estimado: 5 minutos.

Síntesis y anticipo

Docente: Pide a cada estudiante completar tres frases: “Un cuadrado es...”, “Su área se calcula...”, “Cuando el lado es $x + 2$, el área se expresa como...”. Revisa rápidamente dos respuestas en plenaria.

Reflexión metacognitiva:

- ¿Qué dato me permitió reconocer la figura como cuadrado?
- ¿Cómo comprobé que $x^2 + 4x + 4$ representa el área?

Retroalimentación: El docente corrige de inmediato confusiones entre perímetro y área y destaca que las unidades del área son cuadradas.

Transferencia: Se anticipa que la siguiente sesión se construirán tablas de valores y se estudiará la función cuadrática asociada al área.

Sesión 2: De la expresión polinómica a la función cuadrática

Fase de Inicio

Tiempo estimado: 10 minutos.

Propósito de la sesión: Recuperar el modelo del cuadrado y analizar cómo cambia su área cuando cambia el valor de la variable.

Conexión con la sesión anterior

Docente: Escribe en el pizarrón $A = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ y pregunta: “Si $x = 1$, ¿cuánto mide el lado? ¿Cuál es el área? ¿Y si $x = 4$?”.

Estudiantes: Resuelven individualmente y comparan resultados con un compañero. Después explican por qué el área aumenta cuando aumenta x .

Motivación y contextualización

Docente: Presenta el reto: “El comité escolar quiere construir cuadrados de diferentes tamaños para colocar macetas. Necesita una tabla que indique cuánto material se requiere para cada valor de x ”. Pregunta: **¿Podemos predecir el área sin dibujar cada cuadrado?**

Estudiantes: Plantean que pueden usar la expresión algebraica, elaborar una tabla y comparar patrones.

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado: 40 minutos.

Presentación del contenido mediante ABP: El docente retoma la situación del terreno y explica que una función relaciona cada valor permitido de x con un único valor de área. No comienza con una definición extensa; conduce a los estudiantes a construirla a partir de la tabla y la expresión obtenidas.

Actividad 4. Construimos la tabla del área

Objetivos específicos: Evaluar una expresión cuadrática y reconocer una relación funcional.

Organización: Parejas. **Tiempo:** 15 minutos.

- **Docente:** Entrega una tabla con las columnas x , lado $x + 2$ y área $A = x^2 + 4x + 4$.
- **Estudiantes:** Completan la tabla para $x = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5 .
- **Docente:** Pregunta: “¿Qué valor de área corresponde a cada valor de x ? ¿Puede un mismo valor de x tener dos áreas diferentes?”.

- **Estudiantes:** Comprueban que cada valor de x produce un solo valor de área y escriben la relación como $A(x) = x^2 + 4x + 4$.
- **Docente:** Solicita verificar dos resultados calculando primero el lado y después elevándolo al cuadrado.

Producto: Tabla de valores completa y explicación de la relación entre x y $A(x)$.

Actividad 5. Representamos y explicamos la función

Objetivos específicos: Representar una función cuadrática y argumentar su significado en el contexto del problema.

Organización: Equipos de 3 o 4 estudiantes. **Tiempo:** 15 minutos.

- **Docente:** Pide ubicar en un plano cartesiano los pares ordenados de la tabla, usando x en el eje horizontal y $A(x)$ en el eje vertical.
- **Estudiantes:** Marcan los puntos, los unen suavemente y observan la forma de la gráfica.
- **Docente:** Pregunta: “¿La gráfica es una línea recta? ¿Qué forma observan? ¿Por qué aumenta cada vez más rápido?”.
- **Estudiantes:** Identifican una curva con forma de parábola y relacionan su crecimiento con el término x^2 .
- **Docente:** Solicita escribir una conclusión usando la estructura: “La función $A(x)=...$ representa..., porque...”.

Producto: Gráfica de la función y explicación escrita.

Actividad 6. Reto de verificación y comunicación

Objetivos específicos: Verificar expresiones cuadráticas y comunicar procedimientos.

Organización: Plenaria con participación de equipos. **Tiempo:** 10 minutos.

- **Docente:** Entrega a cada equipo una tarjeta: “Un estudiante afirma que el área de un cuadrado de lado $x + 3$ es $x^2 + 3x + 9$. ¿Tiene razón?”.
- **Estudiantes:** Utilizan un modelo geométrico o la propiedad distributiva para analizar la afirmación.
- **Docente:** Pide que comparen $(x + 3)(x + 3)$ con $x^2 + 6x + 9$ y que comprueben el resultado usando $x = 2$.
- **Estudiantes:** Presentan una justificación breve y señalan el error: faltó considerar los dos términos $3x$.

Producto: Resolución argumentada del reto y exposición breve.

Diferenciación y transiciones

- **Para quienes necesitan apoyo:** ofrecer una tabla parcialmente completada, una guía de sustitución paso a paso y la posibilidad de construir primero el cuadrado con medidas concretas.
- **Para quienes terminan antes:** comparar las funciones $A(x)=(x+2)^2$ y $B(x)=(x+3)^2$, describiendo cuál produce mayor área para $x=2$ y por qué.

Transición: El docente conecta las producciones diciendo: “La figura nos permitió obtener una expresión; la tabla mostró cómo cambia el área y la gráfica nos permitió ver la función cuadrática”.

Fase de Cierre

Tiempo estimado: 10 minutos.

Síntesis colectiva

Docente: Construye en el pizarrón una cadena de ideas y solicita que los estudiantes completen los espacios:

cuadrado → **lado** $x + 2$ → **área** $(x + 2)^2$ → **polinomio** $x^2 + 4x + 4$ → **función cuadrática** $A(x)$.

Estudiantes: Explican oralmente qué representa cada elemento y escriben la cadena en su cuaderno.

Reflexión metacognitiva

- ¿Cómo pasé de una figura geométrica a una expresión polinómica?
- ¿Qué procedimiento me ayudó más para desarrollar el cuadrado de un binomio: el dibujo, la distribución o la tabla?
¿Por qué?
- ¿Cómo sé que $A(x)=x^2+4x+4$ es una función cuadrática?

Retroalimentación, transferencia y reto

Retroalimentación: El docente revisa la tabla, la gráfica y el desarrollo algebraico con una lista de cotejo. Señala un logro y una mejora concreta por equipo, por ejemplo: “La expresión está correctamente desarrollada; ahora agreguen las unidades cuadradas en la interpretación del área”.

Transferencia: Se conversa sobre otras situaciones donde una medida se multiplica por sí misma, como diseñar una baldosa, calcular el área de una pantalla cuadrada o planear un huerto.

Reto para casa: Diseñar un cuadrado cuyo lado sea $x + 4$, escribir su área factorizada y desarrollada, y calcularla para $x=1$ y $x=3$. Deben incluir un dibujo dividido en regiones.

Evaluación

Tipo de evaluación

- **Diagnóstica:** Durante el inicio de la sesión 1, mediante la clasificación de figuras y las preguntas sobre cuadriláteros, lados iguales y área.
- **Formativa:** Durante las actividades 1 a 6, mediante observación directa, preguntas guía, revisión de dibujos, tablas, cálculos y explicaciones.
- **Sumativa:** En el cierre de la sesión 2, mediante la cadena conceptual, la resolución del reto $(x+3)^2$ y el ticket de reflexión.

Criterios de evaluación

- Identifica correctamente que un cuadrado es un cuadrilátero con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos.

Relacionado con el objetivo 1.

- Calcula el área usando lado por lado e interpreta correctamente las unidades cuadradas. **Relacionado con el objetivo 2.**
- Representa el área de un cuadrado con lado $x+a$ mediante una expresión factorizada y una expresión desarrollada. **Relacionado con el objetivo 3.**
- Aplica la propiedad distributiva o un modelo geométrico para desarrollar un cuadrado de binomio y verifica el resultado. **Relacionado con el objetivo 4.**
- Explica la relación entre la expresión del área, la tabla de valores y la función cuadrática. **Relacionado con el objetivo 5.**

Instrumentos sugeridos

- Lista de cotejo para identificar la figura, calcular el área y desarrollar la expresión.
- Rúbrica breve para valorar la explicación oral y escrita del problema.
- Observación directa del trabajo colaborativo y de las estrategias utilizadas.
- Autoevaluación mediante las preguntas metacognitivas del cierre.
- Coevaluación entre equipos durante la presentación del reto de verificación.

Evidencias de aprendizaje

- Dibujo rotulado del cuadrado y justificación de sus características.
- Cálculo del área del cuadrado de lado 6.
- Modelo geométrico de $(x+2)^2$ y desarrollo de x^2+4x+4 .
- Tabla de valores y gráfica de $A(x)=x^2+4x+4$.
- Resolución argumentada del error en el desarrollo de $(x+3)^2$.
- Reto para casa sobre el área de un cuadrado de lado $x+4$.