

<h1>Acercándonos al límite: el viaje hacia lo que está por ocurrir</h1>

Matemáticas | Cálculo | Diseño Universal para el Aprendizaje

Descripción

Este plan introduce el concepto de límite a estudiantes de secundaria mediante situaciones cercanas, representaciones visuales, tablas, gráficas y expresiones algebraicas sencillas. El propósito es que comprendan que un límite describe el valor al que se aproxima una cantidad cuando la variable se acerca a un número, aunque la función no necesariamente esté definida exactamente en ese punto.

Durante seis sesiones, los estudiantes explorarán fenómenos como la velocidad de una bicicleta, el acercamiento a una meta, el zoom de una imagen y el comportamiento de una gráfica. Primero observarán patrones y completarán tablas; después relacionarán tablas, gráficas y expresiones; finalmente calcularán límites directos, límites laterales y algunos límites que requieren simplificación algebraica. También aprenderán a identificar cuándo un límite no existe.

La propuesta aplica el Diseño Universal para el Aprendizaje mediante múltiples medios de representación —videos, tarjetas, gráficas, lenguaje cotidiano y simbología—; múltiples formas de acción y expresión —explicaciones orales, dibujos, tablas, presentaciones y herramientas digitales—; y diversas estrategias de motivación, como retos, trabajo colaborativo y elección de productos. Así, los estudiantes pueden demostrar lo que comprenden de diferentes maneras y relacionar el cálculo con situaciones reales.

Objetivos de Aprendizaje

- **Interpretar** el límite como el valor al que se aproxima una función cuando la variable se acerca a un número, utilizando lenguaje cotidiano, tablas y gráficas.
- **Calcular** límites sencillos por sustitución directa y mediante simplificación algebraica básica.
- **Comparar** los límites laterales para decidir si un límite existe y justificar la respuesta.
- **Representar** una situación de cambio mediante una tabla, una gráfica y una expresión relacionada con un límite.
- **Argumentar** sus procedimientos y conclusiones empleando evidencias numéricas, gráficas o algebraicas.

Recursos Necesarios

- Pizarrón, marcadores de cuatro colores, borrador y cinta adhesiva.
- Seis hojas de trabajo, una por sesión, con tablas, gráficas, problemas y espacios para justificar.
- Tarjetas con valores de entrada, valores de salida, gráficas y expresiones algebraicas.
- Una pelota o automóvil de juguete, regla, cronómetro y cinta para marcar una pista de aproximadamente 2 metros.
- Calculadoras básicas, una por pareja; hojas cuadriculadas, lápices, colores y notas adhesivas.

- Computadoras o tabletas, preferentemente una por pareja, con GeoGebra o Desmos.
- Proyector y video corto sin sonido sobre el acercamiento de un automóvil a una línea de meta o sobre el zoom de una imagen.
- Carteles con las frases: “se acerca a”, “por la izquierda”, “por la derecha”, “el valor exacto” y “no existe”.
- Rúbrica de proyecto, lista de cotejo, tarjetas de autoevaluación y portafolio individual.

Requisitos Previos

- Reconocer números enteros, decimales y fracciones sencillas.
- Ubicar puntos en el plano cartesiano e interpretar coordenadas.
- Completar tablas de valores y reconocer patrones numéricos.
- Comprender el significado básico de una variable y evaluar expresiones sencillas.
- Identificar operaciones con polinomios, productos notables básicos y factorización común.
- Distinguir visualmente una recta, una curva, un punto abierto y un punto cerrado en una gráfica.

Actividades

Sesión 1: ¿Qué significa acercarse?

Fase de Inicio

Tiempo estimado: 15 minutos.

Propósito de la sesión

Comprender intuitivamente la idea de aproximación y relacionarla con el lenguaje de los límites. El docente explica: “Hoy no empezaremos con una fórmula. Primero investigaremos qué ocurre cuando algo se acerca cada vez más a un lugar”.

Activación de conocimientos previos

- **Docente:** Muestra una recta numérica y pregunta: “¿Qué números están cada vez más cerca de 3: 2, 2.5, 2.9, 2.99 o 4? ¿Podemos acercarnos mucho a 3 sin escribir exactamente 3?”.
- **Estudiantes:** Responden individualmente en una nota adhesiva y después comparan sus respuestas con un compañero.

Motivación y enganche

El docente proyecta una imagen ampliada de una fotografía y pregunta: “Cuando hacemos zoom, ¿la imagen se acerca a un punto o llega necesariamente a él?”. Se presenta el reto: describir qué ocurre justo antes de llegar a una meta.

Contextualización

Se relaciona la idea con acercarse a una línea de llegada, aproximar una medida al construir un objeto o acercar el dedo a un ícono de una pantalla. Los estudiantes mencionan una situación cotidiana en la que utilizan palabras como “casi”, “cada vez más cerca” o “aproximadamente”.

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado: 95 minutos.

Presentación del contenido

El docente coloca en el pizarrón la frase: **“El límite indica hacia qué valor se acerca una cantidad cuando la entrada se aproxima a un número”**. Explica que el símbolo $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ se lee “el límite de f de x cuando x se acerca a a ”. Usa una recta numérica grande y flechas desde ambos lados hacia 3. Se ofrece la explicación oral, una tarjeta visual con la notación y una tabla impresa para que cada estudiante pueda elegir el apoyo que necesita.

Actividad 1. La pista de aproximación

Objetivo: Interpretar el límite de manera intuitiva y representar aproximaciones.

- **Docente:** Marca una línea como “meta” y coloca una pelota a 1 metro. Indica que cada pareja debe moverla recorriendo la mitad de la distancia restante: 1/2 m, 1/4 m, 1/8 m.
- **Estudiantes:** Registran en una tabla el número de movimiento y la distancia que falta. Responden: “¿La pelota llega exactamente a la línea después de tres movimientos? ¿A qué distancia se acerca?”.
- En plenaria, el docente escribe: “La distancia faltante se acerca a 0”. Los estudiantes proponen expresiones cotidianas para describirlo.

Organización: Parejas. **Evidencia:** Tabla completada y explicación de tres oraciones. **Tiempo:** 25 minutos.

Rol del docente: Observa si los estudiantes confunden “acercarse” con “llegar”; pregunta: “¿Qué ocurre con la distancia en cada movimiento?” y “¿La idea depende de detenernos después de tres movimientos?”.

Actividad 2. Tabla de valores cerca de un número

Objetivo: Interpretar aproximaciones mediante tablas.

- **Docente:** Entrega la función sencilla $f(x)=x+2$ y la tabla con $x=2, 2.5, 2.9, 2.99, 3.01, 3.1$ y 3.5 .
- **Estudiantes:** Calculan $f(x)$, observan qué valores se acercan a 5 y completan la frase: “Cuando x se acerca a 3, $f(x)$ se acerca a ____”.
- El docente cambia la función por $g(x)=10-x$ y pide predecir el valor al acercarse x a 4.

Organización: Individual y luego parejas. **Evidencia:** Dos tablas y una conclusión escrita. **Tiempo:** 30 minutos.

Rol del docente: Modela una fila y ofrece una tabla parcialmente completada a quien lo requiera. Pregunta: “¿Qué número de salida se repite cada vez más cerca?”.

Actividad 3. Galería de representaciones

Objetivo: Relacionar lenguaje, tabla y representación gráfica.

- **Docente:** Distribuye cuatro carteles: una recta numérica, una tabla, una gráfica y una frase. Los estudiantes deben asociar los carteles que expresan la misma idea.
- **Estudiantes:** Caminan por el aula, revisan las representaciones y justifican con una oración por qué las relacionaron.
- Cada grupo presenta una asociación y utiliza la frase “La evidencia muestra que...”.

Organización: Grupos de 3 o 4. **Evidencia:** Clasificación de tarjetas y justificación oral. **Tiempo:** 30 minutos.

Diferenciación: Quienes necesitan apoyo reciben tablas con colores que conectan entradas y salidas. Quienes terminan antes inventan una tabla donde la salida se aproxime a 7 cuando x se acerque a 5. Se permite responder mediante dibujo, explicación oral o texto.

Transición: El docente concluye: “Ya describimos el acercamiento con palabras y tablas; en la próxima sesión veremos cómo leerlo directamente en una gráfica”.

Fase de Cierre

Tiempo estimado: 10 minutos.

Síntesis

Cada estudiante completa un ticket de salida: “Un límite describe...”, “Una tabla me ayuda a...”, y “La expresión $x \rightarrow 3$ significa...”. Dos estudiantes leen sus respuestas.

Reflexión metacognitiva

- “¿Qué diferencia hay entre acercarse a un número y ser exactamente ese número?”
- “¿Qué representación me ayudó más: la pista, la tabla o la recta numérica? ¿Por qué?”
- “¿Puedo explicar con mis palabras qué significa $x \rightarrow a$?”

Retroalimentación, transferencia y tarea

El docente revisa rápidamente los tickets, corrige la confusión entre aproximación e igualdad y anticipa que las gráficas permitirán observar el comportamiento desde la izquierda y la derecha. Como tarea, los estudiantes fotografían o describen una situación cotidiana relacionada con “acercarse cada vez más”.

Sesión 2: Leer límites en gráficas

Fase de Inicio

Tiempo estimado: 15 minutos.

Propósito y conexión

El docente recupera dos tickets de la sesión anterior y pregunta: “Si una gráfica tiene un círculo abierto en $x=2$, ¿podemos saber qué valor se acerca la curva?”. Se presenta el objetivo: leer límites observando una gráfica desde ambos lados.

Activación, motivación y contextualización

En el pizarrón aparece una gráfica de una aplicación que muestra el nivel de batería. Cerca de $x=2$ horas, la curva se acerca a 50%, aunque hay un punto abierto. Los estudiantes votan con pulgar arriba o abajo: “¿El límite puede existir aunque no haya un punto dibujado?”. Se aclara que la situación representa datos idealizados y que se investigará la razón matemática.

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado: 95 minutos.

Presentación del contenido

El docente dibuja una curva que se aproxima a $y=4$ cuando x se acerca a 2 y marca un círculo abierto en (2,4). Explica: “Para hallar el límite no miramos primero el punto exacto; seguimos la gráfica cuando x se acerca”. Después muestra una flecha desde la izquierda y otra desde la derecha. Se entregan versiones impresas con alto contraste y una versión digital ampliable.

Actividad 1. Detectives de gráficas

Objetivo: Leer un límite en una gráfica y distinguirlo del valor de la función.

- **Docente:** Entrega cuatro gráficas con curvas y puntos abiertos o cerrados. Modela la primera: “Me acerco a $x=1$ desde la izquierda; observo que y se acerca a 3”.
- **Estudiantes:** Para cada gráfica completan: “ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ___$ ”; “ $f(a) = ___$, si está definido”; “¿son iguales o diferentes?”.
- En parejas comparan respuestas y colocan una tarjeta verde si el límite existe y amarilla si requieren revisar.

Organización: Individual y parejas. **Evidencia:** Hoja de análisis de cuatro gráficas. **Tiempo:** 30 minutos.

Rol docente: Pregunta “¿Qué hace la curva antes de llegar a $x=a$?” y “¿Estás mirando el punto o el comportamiento cercano?”.

Actividad 2. Caminos desde ambos lados

Objetivo: Comparar límites laterales.

- **Docente:** Entrega tres gráficas: una continua, una con salto y una con crecimiento sin acercarse a un valor vertical. Introduce las expresiones “límite por la izquierda” y “límite por la derecha” sin exigir notación formal.
- **Estudiantes:** Marcan con azul el recorrido desde valores menores que a y con rojo el recorrido desde valores mayores que a . Registran el valor al que se acerca cada lado.
- En grupos completan una tabla: gráfica, izquierda, derecha, conclusión sobre el límite.

Organización: Grupos de 3 o 4. **Evidencia:** Tabla de límites laterales y explicación. **Tiempo:** 35 minutos.

Actividad 3. Construye y adivina

Objetivo: Representar gráficamente una situación de aproximación.

- **Docente:** Pide a cada grupo construir una gráfica donde el límite en $x=2$ sea 5, pero el valor de la función sea 3 o no esté definido.
- **Estudiantes:** Dibujan la curva, colocan el punto abierto y, si lo desean, un punto cerrado en otra altura. Otro grupo interpreta su gráfica y escribe el límite.
- Los autores verifican si la interpretación coincide con su intención y explican cualquier diferencia.

Organización: Grupos. **Evidencia:** Gráfica creada y explicación oral. **Tiempo:** 30 minutos.

Diferenciación y transición: Se proporcionan ejes ya trazados y ejemplos coloreados a quienes lo necesiten. Los estudiantes avanzados crean una gráfica con dos puntos abiertos. El docente enlaza: “Si una expresión representa la gráfica, necesitaremos calcular su límite con números; eso haremos en la sesión siguiente”.

Fase de Cierre

Tiempo estimado: 10 minutos.

Síntesis y reflexión

En parejas redactan una regla: “El límite existe cuando...”. Luego responden: “¿Puede existir un límite si $f(a)$ no está definida?” y “¿Qué debo comparar para decidir si existe?”.

Retroalimentación y transferencia

El docente muestra tres mini gráficas y solicita respuestas simultáneas en pizarras pequeñas. Corrige de inmediato usando flechas de izquierda y derecha. Como tarea, cada estudiante dibuja una gráfica con límite 4 en $x=1$ y valor de función 6.

Sesión 3: Calcular límites por sustitución directa

Fase de Inicio

Tiempo estimado: 15 minutos.

Docente: Revisa la tarea y pregunta: “En la gráfica, ¿qué valor se acerca la curva? ¿Qué valor tiene el punto?”. Presenta el objetivo: usar una expresión algebraica para obtener límites sencillos.

Estudiantes: Resuelven mentalmente: si $f(x)=2x+1$, ¿qué valor se obtiene cuando x se acerca a 3? Explican el procedimiento con palabras. Para enganchar, el docente plantea el reto: “¿Podemos predecir el resultado sin hacer una tabla enorme?”. Se conecta con calcular rápidamente el costo de una compra cuando cambia una cantidad.

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado: 95 minutos.

Presentación del contenido

El docente presenta el caso **$\lim_{x \rightarrow 2} (3x+1)$** . Sustituye x por 2 y obtiene 7, explicando que en expresiones continuas el límite coincide con el valor de la función. Se usa un esquema visual de tres pasos: **1. Identificar el número al que se**

acerca x . 2. Sustituirlo. 3. Simplificar y escribir una conclusión.

Actividad 1. Estaciones de sustitución

Objetivo: Calcular límites directos.

- **Docente:** Organiza cuatro estaciones: funciones lineales, cuadráticas sencillas, constantes y expresiones con fracciones cuyo denominador no se hace cero.
- **Estudiantes:** En cada estación resuelven tres tarjetas siguiendo los tres pasos y comprueban una respuesta mediante una tarjeta de autocorrección.
- Antes de cambiar de estación, explican un ejercicio a un integrante distinto del grupo.

Organización: Grupos de 3 o 4. **Evidencia:** Pasaporte de estaciones con doce ejercicios. **Tiempo:** 35 minutos.

Actividad 2. Tabla, gráfica y cálculo

Objetivos: Relacionar representaciones y argumentar resultados.

- **Docente:** Entrega la función $f(x)=x^2-1$ y solicita investigar el límite cuando x se acerca a 2.
- **Estudiantes:** Calculan cinco valores cercanos a 2, grafican los pares en papel o GeoGebra y calculan por sustitución. Escriben si las tres representaciones coinciden.
- El docente pide que una pareja explique por qué no es necesario usar infinitos valores para reconocer el patrón.

Organización: Parejas. **Evidencia:** Tabla, gráfica y procedimiento algebraico. **Tiempo:** 30 minutos.

Actividad 3. Semáforo de errores

Objetivo: Detectar y corregir errores de procedimiento.

- **Docente:** Presenta tres soluciones: una correcta, una que sustituye el número equivocado y otra que no simplifica.
- **Estudiantes:** Levantan tarjeta verde, amarilla o roja; señalan el paso problemático y reescriben la solución correcta.
- Se pregunta: “¿Qué evidencia demuestra que tu corrección es válida?”.

Organización: Plenaria y trabajo individual. **Evidencia:** Corrección argumentada de tres procedimientos. **Tiempo:** 30 minutos.

Diferenciación: Se ofrecen ejemplos con números enteros, una plantilla de tres pasos y calculadora para verificar. Quienes avanzan resuelven límites con decimales o crean un error frecuente para que otro grupo lo detecte. La transición se realiza mediante la pregunta: “¿Qué hacemos si al sustituir aparece $0/0$?”.

Fase de Cierre

Tiempo estimado: 10 minutos.

Síntesis: Cada estudiante resuelve $\lim_{x \rightarrow 4} (2x-3)$ y escribe una frase que justifique el resultado. Después completa: “La sustitución directa funciona cuando...”.

Reflexión: “¿Qué paso me resulta más seguro?”, “¿Cómo comprobé mi respuesta?” y “¿Qué significa el resultado dentro de la función?”.

Retroalimentación: El docente recoge el ejercicio, clasifica rápidamente los errores y comunica que se retomarán en la siguiente sesión. **Tarea:** resolver cuatro límites directos y señalar cuáles pueden comprobarse con una gráfica.

Sesión 4: Cuando aparece 0/0: simplificar para descubrir

Fase de Inicio

Tiempo estimado: 15 minutos.

El docente revisa un ejercicio de la tarea y plantea **$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)/(x - 2)$** . Pregunta: “¿Qué ocurre al sustituir? ¿Significa que el límite no existe?”. Los estudiantes hacen una predicción individual y la justifican. Se contextualiza con una tasa o razón que parece indeterminada porque numerador y denominador se acercan a cero.

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado: 95 minutos.

Presentación del contenido

El docente explica que la forma 0/0 indica que debemos investigar más, no que la respuesta sea automáticamente cero o que el límite no exista. Factoriza $x^2 - 4$ como $(x - 2)(x + 2)$, cancela el factor común para valores cercanos a 2 y calcula el límite de $x + 2$. Se aclara que se simplifica la expresión para estudiar los valores cercanos, no para afirmar que la expresión original está definida en $x = 2$.

Actividad 1. Rompecabezas algebraico

Objetivo: Simplificar expresiones para calcular límites.

- **Docente:** Entrega tarjetas con numeradores, factorizaciones y denominadores. Modela la unión de $x^2 - 9$, $(x - 3)(x + 3)$ y $x - 3$.
- **Estudiantes:** Forman parejas de expresión original, factorización y expresión simplificada. Después escriben qué valor se aproxima la expresión.
- Comparan una expresión simplificada con una tabla numérica para comprobar que los valores cercanos coinciden.

Organización: Grupos de 3. **Evidencia:** Tres cadenas algebraicas completas. **Tiempo:** 30 minutos.

Actividad 2. Laboratorio 0/0

Objetivo: Calcular límites mediante factorización y justificar cada paso.

- **Docente:** Entrega problemas como $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)/(x - 3)$, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)/(x - 1)$ y $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 16)/(x - 4)$.
- **Estudiantes:** Sustituyen primero, identifican 0/0, factorizan, cancelan el factor común y vuelven a sustituir en la expresión simplificada.
- Cada pareja graba o escribe una explicación de un minuto con las frases: “Al inicio obtuve...”, “Después transformé...” y “Por eso el límite es...”.

Organización: Parejas. **Evidencia:** Procedimientos y explicación oral o escrita. **Tiempo:** 35 minutos.

Actividad 3. Comprobación digital

Objetivos: Relacionar álgebra, tabla y gráfica.

- **Docente:** Indica graficar en Desmos o GeoGebra la función $(x^2-4)/(x-2)$, observando el hueco en $x=2$.
- **Estudiantes:** Acercan el cursor al hueco, construyen una tabla con valores próximos y comparan con el resultado algebraico.
- Quienes no tengan dispositivo utilizan una gráfica impresa con una tabla para completar.

Organización: Parejas. **Evidencia:** Captura o gráfica anotada, tabla y conclusión. **Tiempo:** 30 minutos.

Diferenciación: Se proporcionan factorizaciones ya iniciadas y tarjetas de colores para los factores comunes. Los estudiantes que avanzan comparan dos funciones con el mismo límite pero diferentes valores en el punto. **Transición:** El docente pregunta: “¿Qué pasaría si desde la izquierda y desde la derecha la gráfica se acercara a valores diferentes?”.

Fase de Cierre

Tiempo estimado: 10 minutos.

Síntesis: En una salida de tres pasos, los estudiantes completan: “Si aparece 0/0, primero...; luego...; finalmente...”. Resuelven un ejemplo breve.

Reflexión: “¿Por qué 0/0 no es la respuesta?”, “¿Qué representa el hueco en la gráfica?” y “¿Cómo confirmé el resultado?”.

Retroalimentación y transferencia: El docente revisa dos procedimientos en el pizarrón y destaca la importancia de indicar la factorización. Anticipa el estudio de límites laterales. La tarea consiste en explicar a un familiar, con un dibujo, qué significa un hueco en una gráfica.

Sesión 5: Límites laterales y casos en los que no existe

Fase de Inicio

Tiempo estimado: 15 minutos.

El docente muestra una puerta que se abre desde dos lados y conecta la imagen con acercarse por la izquierda o por la derecha. Recupera la sesión anterior preguntando: “¿Qué observamos al acercarnos a un hueco?”. Luego presenta una gráfica con salto y solicita predecir si existe el límite.

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado: 95 minutos.

Presentación del contenido

Se explican los límites laterales con lenguaje accesible: acercarse por la izquierda significa usar valores menores que a ; por la derecha, valores mayores que a . Se escribe la regla: **el límite existe si ambos lados se acercan al mismo valor**. Se muestran tres casos: límite común, salto y crecimiento indefinido. Las explicaciones se acompañan de flechas de colores, tablas separadas y ejemplos orales.

Actividad 1. Izquierda o derecha

Objetivo: Calcular y representar límites laterales sencillos.

- **Docente:** Entrega tablas con x cercanos a 2 por la izquierda: 1.9, 1.99, 1.999; y por la derecha: 2.1, 2.01, 2.001.
- **Estudiantes:** Completan los valores de una función por partes y escriben los dos límites laterales.
- Usan flechas azules y rojas para mostrar ambos acercamientos y comparan los resultados.

Organización: Parejas. **Evidencia:** Tabla de aproximaciones y conclusión. **Tiempo:** 30 minutos.

Actividad 2. Clasifica el comportamiento

Objetivo: Comparar límites laterales y decidir si existe el límite.

- **Docente:** Coloca seis estaciones con gráficas: tres con límite existente, dos con salto y una con comportamiento vertical.
- **Estudiantes:** En cada estación registran límite izquierdo, límite derecho y decisión: “existe”, “no existe por salto” o “no se acerca a un valor finito”.
- Justifican una decisión con una oración que incluya ambos valores laterales.

Organización: Grupos de 3 o 4. **Evidencia:** Pasaporte de clasificación. **Tiempo:** 35 minutos.

Actividad 3. Debate matemático: ¿existe o no existe?

Objetivo: Argumentar conclusiones usando evidencias.

- **Docente:** Presenta la afirmación: “Si hay un punto en $x=a$, entonces el límite existe”. Asigna a los grupos la tarea de estar de acuerdo o en desacuerdo.
- **Estudiantes:** Preparan una respuesta con una gráfica, dos valores laterales y una frase de conclusión. Después participan en un debate breve.
- El grupo contrario formula una pregunta: “¿Qué ocurre desde el otro lado?”.

Organización: Grupos y plenaria. **Evidencia:** Argumento visual y participación. **Tiempo:** 30 minutos.

Diferenciación: Se entregan frases incompletas como “Por la izquierda se acerca a...” para quienes requieran apoyo. Quienes terminan antes inventan una función por partes cuyo límite no exista y explican por qué. La transición conecta con el proyecto: “Ahora reuniremos varias representaciones para explicar una situación completa”.

Fase de Cierre

Tiempo estimado: 10 minutos.

Síntesis: Los estudiantes completan un diagrama: límite izquierdo + límite derecho $\rightarrow$ decisión sobre el límite.

Resuelven una gráfica de salto en una tarjeta individual.

Reflexión: “¿Qué debo observar primero en una gráfica?”, “¿Cómo sé que un límite no existe?” y “¿Pude justificar mi decisión con datos?”.

Retroalimentación y tarea: El docente usa respuestas de pizarras para aclarar que un punto aislado no determina el límite. Como preparación para la sesión final, cada estudiante elige una situación: movimiento, temperatura, costo, distancia o uso de una aplicación, para representarla mediante una tabla, una gráfica y una expresión sencilla.

Sesión 6: Proyecto final: contar una historia con un límite

Fase de Inicio

Tiempo estimado: 15 minutos.

El docente presenta el reto final: “Crear una historia matemática en la que una cantidad se acerque a un valor y demostrarlo con una tabla, una gráfica y una explicación”. Revisa con el grupo los cuatro criterios: interpretación, cálculo, representación y justificación. Los estudiantes muestran su situación elegida y reciben una pregunta guía para mejorarla.

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado: 90 minutos.

Presentación del producto

El docente muestra un modelo breve: “La distancia de un objeto a una marca se reduce. Cuando t se acerca a 4 segundos, la distancia se acerca a 0”. Presenta las opciones de producto: cartel, presentación digital, video explicativo de máximo dos minutos o informe ilustrado. Todos deben incluir una pregunta de límite, una tabla con valores próximos, una gráfica, el procedimiento y una conclusión.

Actividad 1. Diseño del proyecto

Objetivos: Representar una situación y planificar una argumentación.

- **Docente:** Entrega una plantilla con los apartados: situación, variable, número de aproximación, tabla, gráfica, cálculo y conclusión.
- **Estudiantes:** Escriben su situación, definen qué representa x y seleccionan una función sencilla, como $x+2$, $2x-1$, x^2 o $(x^2-a^2)/(x-a)$, según su nivel.
- El docente revisa cada plan y formula la pregunta: “¿Qué cantidad se acerca a qué valor y cómo lo demostrarás?”.

Organización: Individual o parejas. **Evidencia:** Guion aprobado. **Tiempo:** 25 minutos.

Actividad 2. Producción y ensayo

Objetivos: Calcular, representar y argumentar límites.

- **Estudiantes:** Elaboran la tabla con al menos cinco valores cercanos desde uno o ambos lados, trazan la gráfica y resuelven el límite por sustitución o simplificación.
- Escriben una conclusión con la estructura: “Cuando x se acerca a ___, la función se acerca a ___ porque ___”.

- **Docente:** Realiza conferencias de tres minutos por equipo y utiliza la lista de cotejo para verificar que no confundan $f(a)$ con el límite.
- Antes de presentar, cada estudiante ensaya la explicación ante un compañero, quien formula una pregunta de comprobación.

Organización: Individual o parejas. **Evidencia:** Producto final y ensayo oral. **Tiempo:** 40 minutos.

Actividad 3. Feria de límites

Objetivos: Comunicar y evaluar argumentos matemáticos.

- **Docente:** Organiza una exposición. Cada equipo dispone de tres minutos para presentar y dos minutos para recibir preguntas.
- **Estudiantes:** Presentan su producto, explican la tabla, señalan el acercamiento en la gráfica y muestran el cálculo. Los visitantes completan una tarjeta: “Entendí que...”, “La evidencia fue...” y “Pregunto...”.
- Al final, cada equipo revisa una sugerencia y escribe una mejora posible.

Organización: Feria en grupos. **Evidencia:** Presentación, coevaluación y mejora escrita. **Tiempo:** 25 minutos.

Diferenciación: Se permite utilizar una plantilla, calculadora, lectura de la explicación o presentación grabada. Quienes requieran apoyo pueden trabajar con una función previamente seleccionada y una gráfica parcialmente trazada. Quienes avanzan incluyen límites laterales o comparan el límite con el valor de la función en el punto.

Fase de Cierre

Tiempo estimado: 15 minutos.

Síntesis

El grupo construye en el pizarrón un mapa colectivo con cinco conceptos: aproximación, tabla, gráfica, sustitución y límites laterales. Cada estudiante coloca una nota adhesiva con un ejemplo o definición.

Reflexión metacognitiva

- “¿Cómo puedo explicar un límite sin usar solamente una fórmula?”
- “¿Qué representación me permitió comprobar mejor mi resultado?”
- “¿Qué error corregí durante el proyecto y qué aprendí de él?”

Retroalimentación, transferencia y cierre

El docente entrega retroalimentación breve basada en la rúbrica, destaca avances y señala un siguiente paso personal. Se conversa sobre aplicaciones en velocidad instantánea, diseño de gráficas, economía y ciencias. Como cierre final, los estudiantes escriben una respuesta a la pregunta: “¿Qué significa acercarse sin necesariamente llegar?”.

Evaluación

Tipo de evaluación

- **Diagnóstica:** En la apertura de la Sesión 1, mediante la pregunta sobre números cercanos a 3 y una situación cotidiana de aproximación.
- **Formativa:** Durante las Sesiones 1 a 5, mediante observación directa, revisión de tablas, gráficas, procedimientos, tarjetas de respuesta, debates y tickets de salida.
- **Sumativa:** En la Sesión 6, mediante el proyecto “Historia matemática con un límite”, su presentación y una autoevaluación final.

Criterios de evaluación

- **Interpretación del límite — Objetivo 1:** Explica correctamente hacia qué valor se aproxima la función cuando x se acerca a un número.
- **Cálculo — Objetivo 2:** Resuelve límites por sustitución directa o simplificación algebraica y muestra pasos ordenados.
- **Análisis lateral — Objetivo 3:** Compara los valores por la izquierda y por la derecha y decide correctamente si el límite existe.
- **Representación — Objetivo 4:** Relaciona de manera coherente una situación, una tabla, una gráfica y una expresión.
- **Argumentación — Objetivo 5:** Justifica sus respuestas con evidencias numéricas, gráficas o algebraicas y utiliza vocabulario matemático comprensible.

Instrumentos sugeridos

- Lista de cotejo para tablas y cálculos: identifica el valor de aproximación, sustituye correctamente, simplifica y escribe la respuesta.
- Rúbrica del proyecto final con cuatro niveles: inicial, básico, satisfactorio y destacado.
- Registro de observación del docente para participación, colaboración, preguntas y uso de representaciones.
- Coevaluación durante la Feria de Límites mediante tarjetas de “entendí”, “evidencia” y “pregunta”.
- Autoevaluación individual con escala de 1 a 4 y tres preguntas metacognitivas.
- Portafolio con hojas de trabajo, tickets de salida, correcciones y producto final.

Evidencias de aprendizaje

- Tablas de aproximación y explicaciones de la Sesión 1, que demuestran la interpretación intuitiva del límite.
- Análisis de gráficas, clasificación de límites laterales y dibujos creados en la Sesión 2.
- Pasaporte de estaciones y ejercicios de sustitución de la Sesión 3.
- Procedimientos de factorización, gráficas con huecos y comprobaciones digitales de la Sesión 4.

- Tabla de límites laterales, debate argumentado y clasificación de casos de la Sesión 5.
- Proyecto final con situación contextualizada, tabla, gráfica, cálculo, conclusión y presentación oral o multimodal de la Sesión 6.

Distribución temporal comprobada

- Sesión 1: Inicio 15 minutos + Desarrollo 95 minutos + Cierre 10 minutos = 120 minutos.
- Sesión 2: Inicio 15 minutos + Desarrollo 95 minutos + Cierre 10 minutos = 120 minutos.
- Sesión 3: Inicio 15 minutos + Desarrollo 95 minutos + Cierre 10 minutos = 120 minutos.
- Sesión 4: Inicio 15 minutos + Desarrollo 95 minutos + Cierre 10 minutos = 120 minutos.
- Sesión 5: Inicio 15 minutos + Desarrollo 95 minutos + Cierre 10 minutos = 120 minutos.
- Sesión 6: Inicio 15 minutos + Desarrollo 90 minutos + Cierre 15 minutos = 120 minutos.
- **Total: 720 minutos.**