

<h1>De la trayectoria al diseño: investigando ecuaciones de segundo grado</h1>

Ciencias Exactas y Naturales | Ciencias Físicas | Aprendizaje Basado en Investigación

Descripción

Este plan introduce las ecuaciones de segundo grado desde una situación auténtica de las Ciencias Físicas: la trayectoria de un objeto lanzado verticalmente. Durante dos sesiones, los estudiantes analizarán datos experimentales o simulados, formularán preguntas investigables y utilizarán diferentes procedimientos algebraicos para determinar cuándo un objeto alcanza una altura específica o en qué instantes toca el suelo. El trabajo se desarrolla mediante Aprendizaje Basado en Investigación: observarán un fenómeno, identificarán variables, propondrán una hipótesis, consultarán fuentes primarias o datos originales, resolverán el modelo matemático y argumentarán sus conclusiones. Los estudiantes reconocerán la estructura general $ax^2 + bx + c = 0$, distinguirán sus coeficientes, calcularán el discriminante y aplicarán factorización, fórmula general y verificación gráfica. Además, interpretarán las soluciones en un contexto físico, diferenciando entre resultados matemáticamente posibles y resultados válidos para la situación estudiada. La propuesta es pertinente para estudiantes técnicos y tecnológicos porque relaciona el álgebra con mediciones, control de calidad, diseño, seguridad industrial, automatización y análisis de movimiento. Al finalizar, cada equipo presentará una respuesta sustentada a una pregunta de investigación, mostrando cálculos, evidencia, fuentes consultadas y una explicación técnica clara.

Objetivos de Aprendizaje

- **Identificar** la estructura, los coeficientes y las condiciones de una ecuación de segundo grado en situaciones técnicas y físicas.
- **Formular** una pregunta de investigación y una hipótesis relacionadas con la trayectoria o el tiempo de movimiento de un objeto.
- **Resolver** ecuaciones de segundo grado mediante factorización y fórmula general, verificando los resultados algebraica y gráficamente.
- **Interpretar** las soluciones obtenidas, distinguiendo cuáles tienen sentido en el contexto físico analizado.
- **Argumentar** una conclusión técnica utilizando datos, procedimientos matemáticos y una fuente primaria o conjunto de datos originales.

Recursos Necesarios

- Una hoja de trabajo por estudiante con el reto, tabla de datos y preguntas de investigación.
- Una calculadora científica por pareja o la calculadora de GeoGebra.

- Computador o teléfono con acceso a GeoGebra Graphing Calculator y hoja de cálculo, uno por equipo.
- Proyector o pantalla para mostrar la situación problema y las gráficas.
- Tarjetas con ecuaciones de segundo grado y tarjetas con representaciones gráficas.
- Regla, lápiz, borrador, papel milimetrado y marcadores.
- Guía impresa de consulta con la fórmula general, discriminante y criterios de verificación.
- Video breve de 2 minutos sobre el análisis de trayectorias o lanzamiento de objetos.
- Fuente primaria sugerida: conjunto de datos de mediciones de altura y tiempo obtenido por el docente mediante videoanálisis, sensor o simulación de GeoGebra. También puede emplearse un registro de mediciones elaborado por los estudiantes.
- Rúbrica impresa para valorar el informe y la argumentación del equipo.

Requisitos Previos

- Reconocer variables, unidades de medida y pares ordenados en una tabla de datos.
- Operar con números enteros, fracciones y decimales, incluyendo potencias y raíces cuadradas.
- Representar puntos en el plano cartesiano e interpretar una gráfica básica.
- Resolver ecuaciones lineales y realizar operaciones con expresiones algebraicas.
- Conocer de manera introductoria el movimiento vertical, la altura, el tiempo y la aceleración gravitacional.
- Utilizar una calculadora científica o una herramienta gráfica digital básica.

Actividades

Sesión 1: Del fenómeno físico a la ecuación

Fase de Inicio

Tiempo estimado: 10 minutos.

Propósito de la sesión: Relacionar una situación de movimiento con una ecuación de segundo grado y preparar una investigación breve sobre la trayectoria de un objeto.

Activación de conocimientos previos

Docente: Proyecta la pregunta: “Si una pelota se lanza verticalmente y su altura se modela mediante $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$, ¿cómo podríamos saber en qué instante llega al suelo?”. Solicita que cada estudiante escriba qué representa cada letra, qué información aporta el signo negativo y qué operación intentaría realizar.

Estudiantes: Responden individualmente durante dos minutos y luego comparan sus ideas con un compañero. En plenaria, comparten una interpretación sin necesidad de resolver todavía la ecuación.

Motivación y contextualización

Docente: Presenta un video breve de una trayectoria de lanzamiento o una demostración con una pelota. Explica: “En áreas como mantenimiento, automatización, construcción y seguridad, necesitamos predecir posiciones, tiempos y puntos de impacto. Una ecuación de segundo grado permite convertir una observación física en una predicción calculable”. Muestra la tabla de datos de altura contra tiempo obtenida mediante medición o simulación.

Estudiantes: Identifican dos usos técnicos posibles y formulan una pregunta espontánea sobre el fenómeno. El docente recoge dos o tres preguntas en el tablero y destaca que una investigación debe poder responderse con datos y procedimientos verificables.

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado: 45 minutos.

Presentación del contenido: El docente no inicia con una exposición completa. Entrega una fuente primaria: una tabla de tiempos y alturas de un objeto lanzado verticalmente, junto con la expresión aproximada $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$. Solicita que los estudiantes observen regularidades y propongan qué significa encontrar los valores de t cuando $h(t)=0$. Después de escuchar sus hipótesis, formaliza la estructura $ax^2 + bx + c = 0$, identifica a , b y c y presenta la fórmula general como una herramienta que será comprobada, no memorizada sin análisis.

Actividad 1. Observar, preguntar e hipotetizar

Objetivo específico: Formular una pregunta de investigación y una hipótesis relacionada con una ecuación de segundo grado.

Organización: Equipos de 3 o 4 estudiantes.

- **Docente:** Entrega la tabla de datos y pide leer el encabezado, las unidades y la fuente de obtención.
- **Estudiantes:** Señalan la variable independiente, la variable dependiente y el intervalo de tiempo físicamente posible.
- Cada equipo completa: “¿En qué instante o instantes...?”, “Nuestra hipótesis es...” y “La evidencia que necesitamos es...”.
- El docente indica que una pregunta adecuada debe poder responderse con la ecuación o los datos, por ejemplo: “¿En qué instante la pelota alcanza el suelo?”

Producto: Pregunta de investigación, hipótesis y listado de variables.

Rol del docente: Observa si las preguntas son medibles y pregunta: “¿Qué valor de la altura necesitan igualar a cero?”, “¿Todos los valores de t representan momentos reales?”.

Tiempo estimado: 12 minutos.

Actividad 2. Identificar la estructura y resolver por factorización

Objetivos específicos: Identificar coeficientes y resolver ecuaciones de segundo grado mediante factorización.

Organización: Parejas.

- El docente escribe: $-5t^2 + 20t + 1 = 0$ y solicita identificar $a=-5$, $b=20$ y $c=1$.

- Para una exploración inicial entrega las ecuaciones $x^2-5x+6=0$ y $2x^2-8x=0$. Las parejas las resuelven por factorización.
- Los estudiantes igualan cada factor a cero y comprueban cada raíz sustituyéndola en la ecuación original.
- El docente conecta el procedimiento con el contexto: “Una raíz puede representar un instante inicial y otra un instante posterior; ¿qué información física necesitaríamos para decidirlo?”.

Producto: Tabla con ecuación, coeficientes, factorización, raíces y verificación.

Rol del docente: Pregunta “¿Por qué no basta con encontrar una sola raíz?” y corrige errores de signos o de aplicación de la propiedad del producto nulo.

Tiempo estimado: 15 minutos.

Actividad 3. Investigar la fórmula general y el discriminante

Objetivos específicos: Resolver ecuaciones de segundo grado y relacionar el discriminante con el número de soluciones.

Organización: Equipos de 3 o 4 estudiantes.

- El docente entrega una fuente de consulta breve: fórmula general, definición de $\Delta=b^2-4ac$ y tres ejemplos.
- Cada equipo resuelve $3x^2-4x-2=0$ usando la fórmula general, escribe cada sustitución y redondea a dos decimales.
- Después clasifica tres ecuaciones según su discriminante: positivo, cero o negativo.
- Los equipos redactan una conclusión provisional: “Si el discriminante es..., entonces la ecuación tiene...”.

Producto: Hoja de investigación con procedimiento, discriminante y conclusión provisional.

Rol del docente: Verifica el orden de las operaciones y pregunta: “¿Qué significa que no existan raíces reales en una situación donde la variable representa tiempo?”.

Tiempo estimado: 18 minutos.

Diferenciación y transición

Para quienes necesitan apoyo, se ofrece una plantilla con los espacios $a=$, $b=$, $c=$, $\Delta=$ y cada línea de la fórmula general; también se permite utilizar una recta numérica y trabajar con un compañero tutor. Para quienes terminan antes, se propone comparar la solución algebraica con la gráfica de GeoGebra y explicar por qué una parábola puede cortar al eje x dos veces, una vez o ninguna. El docente cierra diciendo: “Ya tenemos procedimientos y una hipótesis; en la próxima sesión verificaremos la respuesta en la gráfica y construiremos una conclusión técnica”.

Fase de Cierre

Tiempo estimado: 5 minutos.

Síntesis, reflexión y anticipo

Los estudiantes completan un ticket de salida con tres respuestas: “La forma general es...”, “El discriminante permite saber...” y “En un problema físico, una raíz debe revisarse porque...”. El docente recoge los tickets y ofrece retroalimentación rápida sobre un error frecuente observado, especialmente el cambio incorrecto de signos en la

fórmula general.

Preguntas metacognitivas exactas: “¿Qué paso puedo realizar sin ayuda?”, “¿En qué paso necesito verificar con una sustitución?” y “¿Qué dato de la tabla todavía debo relacionar con la ecuación?”. Como transferencia, el docente anuncia que la siguiente sesión se dedicará a graficar, validar las raíces y responder formalmente la pregunta de investigación.

Sesión 2: Verificar, interpretar y argumentar resultados

Fase de Inicio

Tiempo estimado: 8 minutos.

Propósito de la sesión: Recuperar los procedimientos de la sesión anterior y utilizarlos para validar e interpretar las soluciones de una situación física.

Conexión con la sesión anterior

Docente: Presenta dos respuestas anónimas del ticket de salida, una correcta y otra con un error de signo. Pregunta: “¿Cuál respuesta es confiable y qué evidencia necesitamos para afirmarlo?”.

Estudiantes: Comparan las respuestas, explican el error y realizan una comprobación rápida sustituyendo una raíz en la ecuación $x^2-5x+6=0$.

Motivación: El docente plantea el reto: “Un técnico no entrega solo un número; entrega un resultado que puede ser usado para tomar una decisión. Hoy deberán demostrar si su respuesta representa un tiempo real, una distancia posible y una conclusión sustentada”.

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado: 47 minutos.

Presentación del contenido: El docente muestra en GeoGebra la gráfica de $h(t)=-5t^2+20t+1$ y pregunta qué representan las intersecciones con el eje horizontal. Luego recuerda que una solución algebraica debe verificarse con sustitución, gráfica y análisis de unidades. Los estudiantes retoman su pregunta de investigación, aplican el procedimiento y elaboran un informe técnico breve.

Actividad 4. Graficar y validar las soluciones

Objetivos específicos: Resolver y verificar ecuaciones de segundo grado algebraica y gráficamente.

Organización: Parejas.

- Los estudiantes ingresan en GeoGebra la función $h(t)=-5t^2+20t+1$ y observan el vértice y los cortes con el eje t .
- Calculan las raíces con la fórmula general, comparan sus valores con la gráfica y registran la diferencia aproximada.
- Comprueban cada raíz en la expresión original y anotan las unidades.
- Responden: “¿Cuál raíz corresponde al momento posterior al lanzamiento?”, “¿Qué significado tendría una raíz negativa?” y “¿La gráfica confirma la hipótesis?”.

Producto: Captura o dibujo de la gráfica con raíces señaladas y tabla de verificación.

Rol del docente: Pregunta “¿La calculadora sustituyó el razonamiento o solo ayudó a comprobarlo?” y orienta sobre redondeo y lectura de escalas.

Tiempo estimado: 15 minutos.

Actividad 5. Resolver el reto de investigación

Objetivos específicos: Interpretar soluciones y argumentar conclusiones usando datos y una fuente primaria.

Organización: Equipos de 3 o 4 estudiantes.

- Cada equipo selecciona o retoma su pregunta de investigación.
- Organiza el informe en cinco apartados: pregunta, datos o fuente primaria, modelo matemático, procedimiento y conclusión.
- Incluye la ecuación en forma general, identifica los coeficientes, calcula el discriminante y obtiene las raíces.
- Explica cuáles soluciones son válidas en el contexto y por qué. Debe mencionar tiempo, altura y restricciones del fenómeno.
- El docente solicita que cada conclusión use la estructura: “Los datos muestran..., el cálculo indica..., por tanto...”.

Producto: Informe técnico de una página o diapositiva única con cálculos, gráfica y conclusión.

Rol del docente: Revisa que la fuente sea identificable, que los cálculos sean legibles y que la interpretación no confunda una raíz matemática con una respuesta física. Formula preguntas como “¿Qué evidencia respalda esa afirmación?” y “¿Qué cambiaría si el objeto comenzara desde otra altura?”.

Tiempo estimado: 22 minutos.

Actividad 6. Socialización y coevaluación técnica

Objetivos específicos: Argumentar una conclusión y evaluar la calidad de un procedimiento matemático.

Organización: Presentación rápida por equipos y coevaluación.

- Cada equipo dispone de un minuto para presentar su pregunta, resultado principal y evidencia.
- Los demás estudiantes completan dos frases: “La evidencia más convincente fue...” y “Para mejorar la explicación, sugiero...”.
- El equipo responde una pregunta del público y corrige, si es necesario, una interpretación.

Producto: Presentación oral breve y ficha de coevaluación.

Rol del docente: Controla el tiempo, valida procedimientos correctos, solicita precisión en las unidades y registra evidencias de argumentación.

Tiempo estimado: 10 minutos.

Diferenciación y transición

Los estudiantes que requieren apoyo pueden utilizar una guía visual con un ejemplo resuelto, una tabla para organizar datos y lectura compartida de la fuente. También pueden explicar oralmente la conclusión antes de escribirla. Quienes terminan antes calculan el error porcentual entre la raíz teórica y la medición experimental, o analizan cómo cambia la gráfica al modificar el término independiente. La transición al cierre se realiza mediante la pregunta: “¿Qué convierte un cálculo en una respuesta técnica confiable?”. Cada equipo escribe una palabra clave en el tablero: datos, modelo, procedimiento, verificación o interpretación.

Fase de Cierre

Tiempo estimado: 5 minutos.

Síntesis y retroalimentación

El docente organiza las palabras del tablero en una secuencia: **observar → preguntar → modelar → resolver → verificar → interpretar → comunicar**. Solicita a los estudiantes que expliquen en una frase cómo se relaciona esa secuencia con el método científico. Después entrega retroalimentación global, destacando dos fortalezas y un aspecto por mejorar, por ejemplo, escribir siempre las unidades y justificar la selección de la raíz válida.

Reflexión metacognitiva: “¿Puedo identificar los coeficientes de cualquier ecuación de segundo grado?”, “¿Qué comprobación usaría si mi resultado no coincide con la gráfica?” y “¿Cómo justificaría ante un supervisor que una solución matemática no representa un tiempo físicamente posible?”.

Transferencia: El docente relaciona el aprendizaje con diseño de rampas, cálculo de trayectorias, control de procesos y estimación de puntos de impacto. Como reto opcional, cada estudiante busca una situación técnica real que pueda modelarse con una ecuación cuadrática, registra la fuente primaria consultada y escribe la ecuación que propondría.

Evaluación

Evaluación

Tipo y momentos

- **Diagnóstica:** En la apertura de la sesión 1, mediante la interpretación inicial de $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$ y la respuesta sobre variables, signo y significado de la altura.
- **Formativa:** Durante las actividades 1, 2 y 3 de la sesión 1 y las actividades 4 y 5 de la sesión 2, mediante observación directa, preguntas guía, revisión de procedimientos y tickets de salida.
- **Sumativa:** En el cierre de la sesión 2, mediante el informe técnico, la presentación breve y la coevaluación.

Criterios de evaluación vinculados a los objetivos

- **Identificación:** Reconoce correctamente la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y determina los coeficientes, vinculado al objetivo 1.

- **Investigación:** Formula una pregunta medible, una hipótesis coherente e identifica datos o fuente primaria, vinculado al objetivo 2.
- **Procedimiento:** Resuelve la ecuación por factorización o fórmula general, calcula el discriminante y verifica las raíces, vinculado al objetivo 3.
- **Interpretación:** Selecciona las soluciones físicamente válidas y explica el significado de las unidades y restricciones, vinculado al objetivo 4.
- **Argumentación:** Presenta una conclusión sustentada en datos, cálculos, gráfica y fuente consultada, vinculado al objetivo 5.

Instrumentos sugeridos

- Lista de cotejo para identificación de coeficientes, aplicación de la fórmula y verificación.
- Rúbrica analítica de cuatro niveles para el informe técnico y la presentación.
- Registro de observación directa del trabajo colaborativo y las preguntas formuladas.
- Ficha de coevaluación entre equipos.
- Ticket de salida y autoevaluación metacognitiva.

Evidencias de aprendizaje

- Pregunta de investigación, hipótesis y variables registradas en la hoja de trabajo.
- Tabla de ecuaciones con coeficientes, factorización, discriminante, raíces y comprobación.
- Gráfica digital o manual con intersecciones y vértice identificados.
- Informe técnico de una página con fuente primaria, modelo, cálculos e interpretación física.
- Presentación oral y respuestas a las preguntas de los compañeros.
- Ticket de salida y reflexión final sobre el proceso de investigación.