

Raíces, modelos y decisiones: investigación de ecuaciones polinómicas

Ciencias de la Educación | Licenciatura en matemáticas | Aprendizaje Basado en Investigación

Descripción

Este plan de clase aborda las ecuaciones polinómicas desde una perspectiva conceptual, algebraica, numérica e histórica, mediante la metodología de Aprendizaje Basado en Investigación. Durante dos sesiones, los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas formularán preguntas investigables, consultarán fuentes primarias, construirán procedimientos de solución y contrastarán sus resultados mediante representaciones simbólicas, gráficas y computacionales.

El trabajo se organizará alrededor de problemas relacionados con la existencia, multiplicidad, naturaleza y aproximación de las raíces de polinomios. Los estudiantes analizarán el teorema fundamental del álgebra, el teorema del residuo, la factorización, las relaciones de Viète y métodos numéricos como Newton-Raphson. También discutirán por qué no existe una fórmula algebraica general mediante radicales para todas las ecuaciones de grado cinco o superior.

La propuesta vincula el contenido con aplicaciones de la modelación matemática, el procesamiento de señales, la estabilidad de sistemas, la economía, la física y la informática. El énfasis no estará únicamente en obtener respuestas, sino en justificar procedimientos, evaluar la confiabilidad de una solución y comunicar conclusiones con lenguaje matemático riguroso. Al finalizar, cada equipo presentará un informe breve basado en evidencias, con pregunta de investigación, método, resultados, limitaciones y conclusiones.

Objetivos de Aprendizaje

- Analizar la estructura de ecuaciones polinómicas y clasificar sus raíces según su naturaleza, multiplicidad y representación.
- Aplicar el teorema del residuo, la factorización, las relaciones de Viète y métodos numéricos para resolver o aproximar raíces de ecuaciones polinómicas.
- Contrastar resultados algebraicos, gráficos y computacionales, identificando posibles errores de redondeo, convergencia o interpretación.
- Formular y responder una pregunta de investigación matemática utilizando fuentes primarias, procedimientos verificables y argumentos fundamentados.
- Comunicar conclusiones matemáticas mediante un informe breve y una presentación oral sustentada en evidencias.

Recursos Necesarios

- Pizarra, marcadores de tres colores y borrador.
- Una calculadora científica por estudiante o equipo.
- Computadoras, tabletas o teléfonos inteligentes con GeoGebra Classic, Wolfram Alpha o Python con SymPy instalado.
- Hojas de trabajo impresas: diagnóstico, análisis de fuentes, diseño de investigación y rúbrica.
- Tarjetas con ecuaciones polinómicas y tarjetas de roles para equipos.
- Proyector y presentación breve con representaciones gráficas de polinomios.
- Extractos impresos de fuentes primarias: fragmento de “Recherches sur les équations algébriques” de Évariste Galois y fragmento de “A New Method for the Solution of Numerical Equations” de Isaac Newton.
- Acceso a una biblioteca digital o repositorio institucional para consultar las versiones digitalizadas de las fuentes.
- Plantilla digital o impresa para el informe de investigación.
- Rúbrica de evaluación, lista de cotejo para revisión entre pares y formato de autoevaluación.

Requisitos Previos

- Resolver ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas elementales.
- Operar con polinomios: suma, producto, división, evaluación y factorización.
- Comprender el concepto de función, dominio, gráfica, intersección con los ejes y continuidad básica.
- Utilizar números complejos en forma binómica y calcular módulo y argumento de manera elemental.
- Interpretar notación sigma, derivadas básicas y sucesiones numéricas.
- Realizar búsquedas académicas y distinguir una fuente primaria de un libro de texto o una fuente de divulgación.
- Utilizar herramientas digitales para graficar funciones y efectuar cálculos numéricos básicos.

Actividades

Sesión 1: Del problema algebraico a la pregunta de investigación

Fase de Inicio

Tiempo estimado: 15 minutos.

Propósito de la sesión: Recuperar conocimientos previos, contextualizar las ecuaciones polinómicas como objetos de investigación y orientar al grupo hacia la formulación de preguntas matemáticas verificables.

Activación de conocimientos previos: diagnóstico argumentado (5 minutos)

- **Docente:** Entrega una hoja con los polinomios $p(x)=x^3-6x^2+11x-6$, $q(x)=x^4+1$ y $r(x)=x^5-2x+1$. Solicita responder individualmente: “¿Cuál de estos polinomios puede factorizarse fácilmente? ¿Cuántas raíces reales esperas que tenga cada uno? ¿Qué evidencia respalda tu respuesta?”.

- **Estudiantes:** Responden sin consultar herramientas digitales y señalan qué afirmaciones son conjeturas y cuáles son resultados demostrados.
- **Docente:** Recupera dos respuestas contrastantes y pregunta: “¿Qué diferencia existe entre observar una intersección gráfica y demostrar que una raíz tiene determinada multiplicidad?”.

Motivación y enganche: reto de la raíz invisible (4 minutos)

- **Docente:** Proyecta la gráfica de $f(x)=x^4+4x^2+4$ y pregunta: “La gráfica toca el eje x , pero no lo cruza. ¿Qué información ofrece esto sobre sus raíces?”. Después muestra $g(x)=(x-1)^2(x+2)$.
- **Estudiantes:** Comparan ambas gráficas y formulan una hipótesis sobre la relación entre multiplicidad y comportamiento local.
- **Docente:** Presenta el reto: “Durante estas sesiones investigaremos cuándo una ecuación polinómica puede resolverse exactamente, cuándo debemos aproximar sus raíces y cómo justificar que una respuesta es confiable”.

Contextualización y objetivo (6 minutos)

- **Docente:** Explica que los polinomios aparecen en modelos de trayectorias, calibración, control de sistemas, diseño geométrico y algoritmos numéricos. Plantea la pregunta detonadora: “¿Qué método de solución es más adecuado para una ecuación polinómica concreta y cómo podemos demostrar que el resultado no es una coincidencia numérica?”.
- **Estudiantes:** Relacionan el problema con una aplicación de su interés y escriben una pregunta que podría investigarse en equipo.
- **Docente:** Comunica el objetivo: formular una investigación breve sobre raíces polinómicas, sustentada en una fuente primaria y en la comparación de al menos dos métodos.

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado: 100 minutos.

Presentación del contenido: El docente introduce los conceptos mediante preguntas, ejemplos contrastantes y análisis de fuentes, evitando una exposición exclusivamente magistral. Se trabajan el teorema del residuo, la multiplicidad de raíces, las relaciones de Viète, el teorema fundamental del álgebra y la aproximación numérica.

Actividad 1. Lectura matemática de una fuente primaria (25 minutos)

Objetivo específico: Formular y responder una pregunta de investigación utilizando una fuente primaria.

- **Docente:** Organiza equipos de tres o cuatro estudiantes y asigna roles: coordinador, lector matemático, verificador de cálculos y relator. Entrega el extracto de Galois o Newton junto con estas preguntas exactas: “¿Qué problema matemático aborda el autor?”, “¿Qué afirmación puede relacionarse con la resolución de ecuaciones polinómicas?”, “¿Qué conceptos del texto requieren reinterpretación con notación actual?” y “¿Qué pregunta investigable surge de esta lectura?”.

- **Estudiantes:** Subrayan una afirmación central, escriben una paráfrasis contemporánea y distinguen entre afirmación, procedimiento y evidencia. Elaboran una pregunta de investigación que pueda responderse en el aula, por ejemplo: “¿Cómo cambia la convergencia del método de Newton cuando la aproximación inicial se modifica?”.
- **Docente:** Recorre los equipos y pregunta: “¿Su pregunta permite obtener datos o una demostración?”, “¿Qué variable modificarán?” y “¿Qué resultado permitiría confirmar o rechazar su conjetura?”.
- **Producto:** Ficha de análisis de fuente con una pregunta de investigación y una hipótesis inicial.

Actividad 2. Laboratorio algebraico de raíces y multiplicidad (25 minutos)

Objetivos específicos: Analizar la estructura de ecuaciones polinómicas y aplicar factorización y el teorema del residuo.

- **Docente:** Entrega a cada equipo una tarjeta con una ecuación, como $(x^4 - 5x^2 + 4 = 0)$, $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0)$, $(x^4 + 1 = 0)$ o $(2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0)$.
- **Estudiantes:** Siguen esta secuencia: evaluar posibles raíces racionales; aplicar división sintética cuando corresponda; factorizar; determinar multiplicidades; expresar raíces reales y complejas; verificar cada raíz sustituyéndola en el polinomio.
- **Docente:** Solicita que cada equipo complete una tabla con columnas “conjetura”, “procedimiento”, “resultado” y “verificación”. Pregunta: “¿Qué evidencia justifica que no existen más raíces reales?” y “¿Cómo se relaciona la suma y el producto de las raíces con los coeficientes?”.
- **Producto:** Tabla algebraica completa y representación gráfica de la ecuación.

Actividad 3. Diseño de una investigación computacional (25 minutos)

Objetivos específicos: Contrastar resultados algebraicos, gráficos y computacionales; formular una pregunta investigable.

- **Docente:** Indica: “Seleccionen una ecuación de grado tres, cuatro o cinco. Comparen un procedimiento exacto, una representación gráfica y un procedimiento numérico. No basta con copiar el resultado del software: deben explicar cómo se obtiene y cómo se verifica”.
- **Estudiantes:** Definen la pregunta, hipótesis, variables, procedimiento y criterios de validez. Pueden investigar, por ejemplo, el efecto de distintas aproximaciones iniciales en Newton-Raphson para $(p(x) = x^3 - 2x - 5)$, o comparar factorización y aproximación numérica en un polinomio de cuarto grado.
- **Docente:** Revisa cada protocolo con una lista de cotejo: pregunta concreta, hipótesis comprobable, mínimo dos métodos, al menos cinco iteraciones o verificaciones, registro de errores y fuente primaria consultada.
- **Producto:** Protocolo de investigación de una página.

Actividad 4. Recolección inicial y registro de datos (25 minutos)

Objetivos específicos: Aplicar métodos de solución y documentar evidencia matemática.

- **Docente:** Solicita ejecutar el protocolo en GeoGebra, Python o una calculadora. Recuerda la fórmula de Newton-Raphson: $(x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)})$. Indica registrar aproximación inicial, iteraciones, valor de

$\|p(x_n)\|$ y error estimado.

- **Estudiantes:** Realizan los cálculos, capturan la gráfica o tabla de iteraciones y verifican los resultados mediante sustitución. Si el método no converge, registran el hecho en lugar de modificar silenciosamente los datos.
- **Docente:** Pregunta: “¿Qué consideran convergencia?”, “¿Qué ocurre si $\|p'(x_n)=0\|$?” y “¿Cómo distinguirán un error de cálculo de una limitación del método?”.
- **Producto:** Primera tabla de datos, gráfica y registro de incidencias.

Diferenciación y transición

Los estudiantes que necesiten apoyo reciben una guía con un ejemplo resuelto parcialmente, definiciones de raíz, multiplicidad y convergencia, y una tabla de pasos. Quienes terminen antes investigan un contraejemplo de convergencia de Newton o comparan el error absoluto y relativo. Para la transición, el docente indica: “Ya tienen una pregunta y datos iniciales; ahora deben transformar sus cálculos en un argumento que otra persona pueda reproducir”.

Fase de Cierre

Tiempo estimado: 5 minutos.

Síntesis y proyección

- **Docente:** Solicita que cada equipo escriba en una tarjeta tres elementos: una afirmación matemática, una evidencia obtenida y una duda pendiente.
- **Estudiantes:** Entregan la tarjeta y nombran el método que utilizarán para completar su investigación.
- **Docente:** Resume: “Una raíz debe verificarse algebraicamente, gráficamente o numéricamente; una aproximación exige indicar precisión y procedimiento”. Anticipa que la siguiente sesión se dedicará al análisis de datos, revisión entre pares y comunicación de conclusiones.

Sesión 2: Verificación, argumentación y comunicación de resultados

Fase de Inicio

Tiempo estimado: 10 minutos.

Propósito de la sesión: Retomar los protocolos y datos obtenidos, detectar inconsistencias y preparar la construcción de conclusiones matemáticamente justificadas.

Conexión con la sesión anterior (10 minutos)

- **Docente:** Proyecta tres afirmaciones anónimas extraídas de las tarjetas: “La gráfica demuestra todas las raíces”, “Newton siempre converge” y “Una aproximación con seis decimales es exacta”. Pregunta: “¿Qué afirmación es incorrecta o incompleta y cómo la reformularían?”.
- **Estudiantes:** Discuten en parejas y escriben una corrección fundamentada.

- **Docente:** Recupera las respuestas y establece el objetivo de la sesión: analizar la evidencia, revisar la validez del procedimiento y comunicar una conclusión que responda la pregunta de investigación.

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado: 95 minutos.

Presentación del contenido: El docente modela brevemente cómo convertir una tabla de iteraciones en un argumento: identificar el criterio de parada, calcular el residuo, comparar métodos y reconocer limitaciones. Después, los estudiantes validan sus propios resultados y los someten a revisión entre pares.

Actividad 1. Taller de validación de resultados (15 minutos)

Objetivos específicos: Contrastar resultados algebraicos, gráficos y computacionales; identificar errores de interpretación.

- **Docente:** Presenta el ejemplo $(p(x)=x^3-2x-5)$, con aproximación inicial $(x_0=2)$, y muestra una tabla parcial de Newton-Raphson. Pregunta: “¿Qué evidencia debemos presentar para afirmar que $(x \approx 2.09455)$ es una raíz aproximada?”.
- **Estudiantes:** Calculan el residuo $(p(2.09455))$, estiman el error entre iteraciones y comparan con la gráfica.
- **Docente:** Explica que la gráfica orienta, pero el residuo y el criterio de convergencia sustentan la afirmación. Relaciona el análisis con la fuente de Newton.
- **Producto:** Modelo de validación que los equipos usarán como referencia.

Actividad 2. Análisis de datos y construcción del argumento (35 minutos)

Objetivos específicos: Aplicar métodos de solución y responder una pregunta de investigación con evidencia.

- **Docente:** Indica a los equipos completar su investigación con esta estructura: pregunta, hipótesis, método, resultados, verificación, limitaciones y conclusión.
- **Estudiantes:** Organizan sus datos en una tabla o gráfica, comparan al menos dos métodos y calculan el residuo de las raíces aproximadas. Deben señalar si la hipótesis fue confirmada, rechazada o parcialmente confirmada.
- **Docente:** Formula preguntas guía: “¿Qué dato responde directamente la pregunta?”, “¿Qué supuestos hicieron?”, “¿La precisión reportada es coherente con el residuo?” y “¿Qué cambiaría si se utilizara otra aproximación inicial?”.
- **Producto:** Borrador de informe de investigación de dos páginas y una gráfica o tabla de evidencia.

Actividad 3. Revisión entre pares mediante rúbrica (20 minutos)

Objetivos específicos: Evaluar argumentos matemáticos y mejorar la comunicación escrita.

- **Docente:** Intercambia los informes entre equipos y entrega una lista de cotejo con cinco preguntas: “¿La pregunta es específica?”, “¿El método puede reproducirse?”, “¿Los resultados están verificados?”, “¿La conclusión responde la pregunta?” y “¿La fuente primaria se utiliza realmente?”.
- **Estudiantes:** Revisan el trabajo recibido, escriben dos fortalezas y dos recomendaciones concretas. No corrigen directamente el informe; justifican cada sugerencia con evidencia.

- **Docente:** Observa la calidad de las observaciones y solicita aclaraciones cuando una recomendación sea vaga, por ejemplo, “mejorar la explicación”. Pregunta: “¿Qué línea o cálculo debe modificarse y por qué?”.
- **Producto:** Rúbrica de coevaluación diligenciada y retroalimentación escrita.

Actividad 4. Presentación relámpago y síntesis colectiva (25 minutos)

Objetivos específicos: Comunicar conclusiones matemáticas con precisión y comparar estrategias.

- **Docente:** Indica que cada equipo dispone de tres minutos para presentar pregunta, método, resultado principal, evidencia y limitación.
- **Estudiantes:** Presentan, mientras los demás registran una idea transferible y una pregunta crítica por exposición.
- **Docente:** Modera preguntas: “¿Por qué eligieron ese método?”, “¿Cómo verificaron la raíz?” y “¿Qué afirmación no pueden sostener con sus datos?”. Finalmente construye en la pizarra una matriz con métodos exactos, gráficos y numéricos, incluyendo ventajas y limitaciones.
- **Producto:** Presentación oral, matriz comparativa y versión corregida del argumento.

Diferenciación y transición

Los estudiantes que requieren apoyo reciben una plantilla con conectores argumentativos: “Los datos muestran...”, “Esto se verifica mediante...”, “La limitación principal es...”. También pueden presentar con una tabla previamente estructurada. Quienes terminan antes analizan la sensibilidad del método ante otra aproximación inicial o comparan Newton-Raphson con bisección. La transición al cierre se realiza con la indicación: “Ahora separaremos lo que aprendimos sobre procedimientos de lo que aprendimos sobre investigar matemáticamente”.

Fase de Cierre

Tiempo estimado: 15 minutos.

Síntesis (5 minutos)

- **Docente:** Dibuja cuatro columnas en la pizarra: “estructura algebraica”, “representación gráfica”, “aproximación numérica” y “evidencia”. Solicita que cada estudiante aporte una idea clave y un criterio de verificación.
- **Estudiantes:** Elaboran un resumen de tres ideas: una sobre raíces y multiplicidad, otra sobre métodos de solución y otra sobre investigación basada en evidencias.

Reflexión metacognitiva (5 minutos)

- **Estudiantes:** Responden individualmente las preguntas: “¿Qué procedimiento puedo aplicar para verificar que un número es raíz de un polinomio?”, “¿Qué diferencia existe entre una conjetura gráfica y una conclusión demostrada?” y “¿Qué decisión metodológica de mi equipo fortaleció o debilitó la respuesta a nuestra pregunta?”.
- **Docente:** Recoge las respuestas y selecciona ejemplos para retroalimentación posterior.

Retroalimentación, transferencia y tarea (5 minutos)

- **Docente:** Proporciona retroalimentación inmediata destacando un logro común y dos errores frecuentes: confundir aproximación con exactitud y no justificar la ausencia de otras raíces reales.
- **Estudiantes:** Entregan el informe corregido, la coevaluación y el ticket de salida.
- **Transferencia:** El docente conecta el aprendizaje con modelos de datos, estabilidad de sistemas y simulación computacional.
- **Tarea:** Individualmente, seleccionar una ecuación polinómica relacionada con un área aplicada, explicar qué método utilizarían y justificar la elección en un párrafo con una fuente académica.

Evaluación

Tipo y momentos de evaluación

- **Diagnóstica:** Durante la Fase de Inicio de la sesión 1, mediante el análisis individual de tres polinomios y la argumentación sobre sus raíces.
- **Formativa:** Durante el análisis de fuentes, el laboratorio algebraico, el diseño del protocolo, la recolección de datos y la revisión entre pares.
- **Sumativa:** En el cierre de la sesión 2, mediante el informe de investigación, la presentación relámpago, el ticket de salida y la autoevaluación.

Criterios de evaluación vinculados con los objetivos

- **Comprensión estructural:** Analiza correctamente raíces, multiplicidad, factorización y naturaleza real o compleja del polinomio. Vinculado con el objetivo 1.
- **Aplicación de procedimientos:** Utiliza de forma correcta teoremas, factorización o métodos numéricos, mostrando operaciones y criterios de parada. Vinculado con el objetivo 2.
- **Validación de resultados:** Contrasta métodos algebraicos, gráficos y computacionales, calcula residuos o errores y reconoce limitaciones. Vinculado con el objetivo 3.
- **Investigación matemática:** Formula una pregunta clara, emplea una fuente primaria, registra un procedimiento reproducible y relaciona la evidencia con la conclusión. Vinculado con el objetivo 4.
- **Comunicación:** Presenta argumentos ordenados, utiliza notación adecuada y responde preguntas con precisión. Vinculado con el objetivo 5.

Instrumentos sugeridos

- Rúbrica analítica para el informe de investigación, con escala de cuatro niveles.
- Lista de cotejo para el protocolo: pregunta, hipótesis, variables, método, datos, verificación y limitaciones.
- Observación directa del trabajo colaborativo y de la argumentación durante las actividades.
- Rúbrica de coevaluación para la revisión entre pares.
- Autoevaluación metacognitiva mediante el ticket de salida.

Evidencias de aprendizaje

- Ficha de análisis de una fuente primaria y pregunta de investigación.
- Tabla algebraica de factorización, raíces, multiplicidades y verificaciones.
- Protocolo de investigación y registro de datos numéricos o gráficos.
- Informe de investigación con resultados, análisis, limitaciones y conclusión.
- Presentación oral de tres minutos y matriz comparativa de métodos.
- Respuestas individuales de reflexión metacognitiva y tarea de transferencia.