

<h1>El misterio de las dimensiones: resolviendo ecuaciones cuadráticas</h1>

Matemáticas | Álgebra | Aprendizaje Basado en Problemas

Descripción

En esta sesión de Álgebra, los estudiantes descubrirán que las ecuaciones cuadráticas permiten resolver situaciones reales en las que aparecen áreas, dimensiones y trayectorias. A partir del reto de diseñar un pequeño espacio rectangular para una zona de juegos, analizarán información, identificarán la incógnita y construirán una ecuación cuadrática. Después, aprenderán a resolver ecuaciones cuadráticas sencillas mediante factorización y reconocerán cómo verificar e interpretar las soluciones obtenidas.

La clase se desarrollará mediante Aprendizaje Basado en Problemas. En lugar de comenzar con una fórmula aislada, los estudiantes enfrentarán una situación que podría presentarse al organizar un patio escolar, diseñar una cancha o calcular las dimensiones de un espacio. Trabajarán en equipos, justificarán sus procedimientos, compararán estrategias y argumentarán por qué una solución puede ser válida o no en el contexto del problema.

El propósito es que comprendan que una ecuación cuadrática no es únicamente una expresión con una letra elevada al cuadrado, sino una herramienta para modelar y resolver problemas. Al finalizar, podrán reconocer una ecuación cuadrática, transformarla a una forma adecuada, resolverla por factorización en casos sencillos y comprobar si sus respuestas tienen sentido en la vida real.

Objetivos de Aprendizaje

Objetivos de aprendizaje

- **Identificar** una ecuación cuadrática y reconocer sus términos principales en situaciones matemáticas y cotidianas.
- **Modelar** una situación de área mediante una ecuación cuadrática escrita en la forma $ax^2 + bx + c = 0$.
- **Resolver** ecuaciones cuadráticas sencillas mediante factorización y el principio del producto cero.
- **Comprobar** las soluciones sustituyéndolas en la ecuación original y **argumentar** cuáles tienen sentido dentro del problema.

Recursos Necesarios

Recursos requeridos

- Pizarrón, marcadores de tres colores y borrador.
- Hojas de trabajo impresas: una por estudiante y una tarjeta de reto por equipo.
- Tarjetas con expresiones algebraicas y posibles factorizaciones: 30 tarjetas aproximadamente.

- Hojas cuadriculadas, lápices, regla y colores: un juego por estudiante.
- Un sobre por equipo de 3 o 4 estudiantes para guardar su solución.
- Proyector o pantalla para mostrar la situación inicial y ejemplos breves.
- Calculadora básica opcional, únicamente para verificar resultados.
- Presentación digital elaborada en PowerPoint, Google Slides o Canva, con el problema y los pasos de factorización.
- Lista de cotejo impresa para la observación del trabajo en equipo.
- Ticket de salida impreso o media hoja por estudiante.

Requisitos Previos

Requisitos previos

- Reconocer variables, coeficientes, constantes y términos algebraicos.
- Aplicar la propiedad distributiva y reducir términos semejantes.
- Resolver ecuaciones lineales sencillas y comprender el uso de los signos de igualdad.
- Calcular el área de un rectángulo mediante la expresión base por altura.
- Multiplicar binomios sencillos y reconocer productos como $(x + m)(x + n)$.
- Comprender que una medida de longitud o área no puede ser negativa en un problema real.

Actividades

Actividades de la sesión

Fase de Inicio

Tiempo estimado: 20 minutos.

Propósito de la sesión: Comprender que algunas situaciones de la vida cotidiana requieren una ecuación con una variable elevada al cuadrado y preparar los conocimientos necesarios para resolverla.

Activación de conocimientos previos: “¿Qué información falta?” (5 minutos)

Docente: Dibuja un rectángulo en el pizarrón y escribe: “El largo mide $x + 5$ metros, el ancho mide x metros y el área es de 84 m^2 ”. Pregunta exactamente: “¿Qué representa x ? ¿Cómo se calcula el área de un rectángulo? ¿Qué operación aparecerá al multiplicar x por $x + 5$?”

- **Estudiantes:** Responden individualmente durante un minuto y después comentan sus respuestas con un compañero.
- **Docente:** Recupera respuestas como $x(x + 5)$, $x^2 + 5x$ y 84 . No corrige de inmediato; registra las ideas para retomarlas durante el desarrollo.

Motivación y enganche: reto del patio escolar (7 minutos)

Docente: Proyecta la imagen de un patio rectangular y plantea: “La escuela quiere colocar una zona de juegos con un área de 84 m^2 . El largo debe ser 5 metros mayor que el ancho. ¿Podemos descubrir las dimensiones sin medir el patio?”

- **Estudiantes:** Escriben una estimación de posibles dimensiones. Pueden probar pares de números cuyo producto sea 84.
- **Docente:** Pregunta: “¿Qué pares de números conocen que multiplicados den 84? ¿Cuál de ellos tiene una diferencia de 5?”
- **Estudiantes:** Comparten posibilidades, como 7 y 12, y explican cómo las encontraron.

Contextualización y presentación del desafío (8 minutos)

Docente: Explica que el reto de la clase será justificar matemáticamente las dimensiones del espacio. Escribe la pregunta guía: “¿Cómo podemos transformar una situación de área en una ecuación cuadrática y demostrar que nuestra respuesta es correcta?”

Estudiantes: Forman equipos de 3 o 4 integrantes y asignan los roles de lector, organizador de operaciones, verificador y portavoz. Cada equipo recibe una hoja de trabajo.

Transición: El docente indica: “Ya tenemos una situación real y algunas posibles respuestas. Ahora investigaremos qué tiene de especial la ecuación que aparece y qué procedimiento nos permite resolverla”.

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado: 80 minutos.

Presentación del contenido: El nuevo conocimiento se construye a partir del problema. El docente evita iniciar con una definición extensa y guía a los estudiantes para que observen que al multiplicar x por x aparece x^2 . Luego formaliza la idea: una ecuación cuadrática puede escribirse como $ax^2 + bx + c = 0$, con a diferente de cero. Para el problema inicial, $x(x + 5) = 84$ se transforma en $x^2 + 5x - 84 = 0$. Se muestra que, si la expresión puede factorizarse, se utiliza el principio del producto cero: si $(x + m)(x + n) = 0$, entonces $x + m = 0$ o $x + n = 0$.

Actividad 1. Del contexto a la ecuación (10 minutos)

Objetivo específico: Identificar y modelar una situación mediante una ecuación cuadrática.

- **Docente:** Entrega a cada equipo la tarjeta: “Un rectángulo tiene un ancho de x metros, un largo de $x + 5$ metros y un área de 84 m^2 ”. Indica: “No busquen todavía la respuesta. Primero representen cada dato con una expresión y escriban una igualdad para el área”.
- **Estudiantes:** Subrayan los datos, dibujan el rectángulo, escriben $x(x + 5) = 84$ y aplican la distributiva para obtener $x^2 + 5x - 84 = 0$.
- **Docente:** Pregunta: “¿Por qué aparece x^2 ? ¿Por qué necesitamos llevar todos los términos a un mismo lado? ¿Cuál es aquí el valor de a , b y c ?”

- **Evidencia:** Esquema del rectángulo, identificación de datos y ecuación cuadrática en forma general.

Actividad 2. Laboratorio de factorización y producto cero (30 minutos)

Objetivos específicos: Resolver ecuaciones cuadráticas sencillas mediante factorización y comprobar las soluciones.

- **Docente:** Entrega tarjetas con expresiones y parejas de factores. Explica: **“Busquen dos números que al multiplicarse den c y al sumarse den b. Después escriban los factores y apliquen el producto cero”.**
- **Estudiantes:** En equipo, relacionan $x^2 + 5x - 84$ con $(x + 12)(x - 7)$. Multiplican los factores para comprobar que recuperan la expresión original.
- **Estudiantes:** Igualan cada factor a cero: $x + 12 = 0$ y $x - 7 = 0$. Obtienen $x = -12$ y $x = 7$.
- **Docente:** Pregunta: **“¿Por qué aparecen dos soluciones? ¿Las dos pueden representar el ancho de un patio? ¿Qué significa descartar $x = -12$?”**
- **Estudiantes:** Sustituyen $x = 7$ en $x(x + 5)$ y comprueban que $7(12) = 84$. Escriben una conclusión: ancho de 7 m y largo de 12 m.
- **Docente:** Presenta dos ejemplos graduados: $x^2 + 7x + 12 = 0$ y $x^2 - x - 20 = 0$. Los equipos resuelven al menos uno y justifican la elección de factores.
- **Evidencia:** Hoja de procedimiento con factorización, soluciones, comprobación y explicación contextual.

Actividad 3. Reto de modelación: “Diseña otro espacio” (25 minutos)

Objetivos específicos: Modelar, resolver y argumentar una situación cuadrática.

- **Docente:** Entrega a cada equipo uno de estos retos: “Un jardín rectangular tiene un largo 3 m mayor que su ancho y un área de 40 m^2 ” o “Una cartulina rectangular tiene un largo 4 cm mayor que su ancho y un área de 96 cm^2 ”.
- **Estudiantes:** Representan la incógnita, construyen la expresión del área, ordenan la ecuación, factorizan, resuelven y verifican.
- **Docente:** Recorre los equipos y formula preguntas guía: **“¿Qué representa x? ¿La ecuación está igualada a cero? ¿Qué dos números necesitan? ¿Cuál solución tiene sentido como medida?”**
- **Estudiantes:** Preparan una explicación visual en una hoja cuadriculada con dibujo, ecuación, procedimiento y respuesta final acompañada de unidades.
- **Evidencia:** Cartel o solución visual del reto.

Actividad 4. Galería matemática y coevaluación (15 minutos)

Objetivos específicos: Comparar procedimientos y argumentar la validez de una solución.

- **Docente:** Coloca las soluciones en diferentes paredes. Entrega a cada estudiante dos notas adhesivas: una para escribir “un acierto” y otra para escribir “una pregunta o sugerencia”.
- **Estudiantes:** Observan dos trabajos de otros equipos y revisan si contienen modelo, factorización, soluciones, comprobación y unidades.

- **Docente:** Selecciona un trabajo correcto y uno con un error frecuente, sin señalar nombres. Pregunta: “¿En qué paso cambia la respuesta? ¿Cómo podríamos comprobarla?”
- **Estudiantes:** Explican sus observaciones y corrigen su propio procedimiento si es necesario.

Diferenciación y transiciones

Para quienes necesitan apoyo, el docente proporciona una plantilla con las frases “ancho = ___”, “largo = ___”, “área: ___”, además de una tabla de parejas de factores y un ejemplo parcialmente resuelto. También permite representar el problema con un dibujo o material cuadriculado antes de escribir la ecuación. Para quienes terminan antes, propone resolver $x^2 - 9x + 20 = 0$ y crear un problema de área que pueda modelarse con ella. Las transiciones se realizan mediante instrucciones breves: después de modelar se dice “del dibujo pasamos a los factores”; después de factorizar, “de la respuesta algebraica volvemos al contexto”; y antes de la galería, “ahora otros matemáticos revisarán y harán preguntas sobre nuestra evidencia”.

Fase de Cierre

Tiempo estimado: 20 minutos.

Propósito: Consolidar el significado de la ecuación cuadrática, verificar los procedimientos utilizados y relacionar el aprendizaje con otros problemas de la vida cotidiana.

Síntesis colectiva: “Las cuatro estaciones de una solución” (8 minutos)

Docente: Dibuja cuatro recuadros en el pizarrón: **1. Representar, 2. Ordenar, 3. Factorizar y resolver, 4.**

Comprobar e interpretar. Solicita que distintos estudiantes completen cada recuadro usando el problema del patio.

- **Estudiantes:** Explican que se representa el ancho con x , se escribe el área, se lleva la ecuación a cero, se factoriza y se descarta la medida negativa cuando el contexto lo exige.
- **Docente:** Subraya la diferencia entre una solución algebraica y una solución válida para la situación real.

Reflexión metacognitiva y ticket de salida (7 minutos)

Cada estudiante responde individualmente en un ticket de salida las siguientes preguntas exactas:

- “¿Cómo reconoces que una ecuación es cuadrática?”
- “¿Qué paso te ayudó más para resolver el problema del rectángulo y por qué?”
- “Si obtienes una solución negativa en un problema de longitud, ¿qué debes hacer y cómo lo justificas?”
- “Resuelve $x^2 + 6x + 8 = 0$ y comprueba una de tus soluciones.”

Retroalimentación, transferencia y reto (5 minutos)

Docente: Revisa rápidamente algunos tickets, comunica dos logros observados y aclara un error frecuente, como olvidar cambiar todos los términos al mismo lado o no comprobar las soluciones. Invita a los estudiantes a pensar en situaciones donde se usan áreas: diseño de una cancha, tamaño de una pantalla, distribución de un huerto o construcción de un marco.

Transferencia: Como reto, cada estudiante debe fotografiar o dibujar un objeto rectangular de su entorno, proponer una medida desconocida y escribir una situación que pueda resolverse con una ecuación cuadrática factorizable. No es necesario resolverla si todavía requiere apoyo; deberá identificar la variable y construir la ecuación.

Evaluación

Evaluación

Tipo y momentos de evaluación

- **Diagnóstica:** Durante los primeros 5 minutos, mediante las preguntas sobre área, distributiva y expresión $x(x + 5)$. Permite identificar si los estudiantes dominan los conocimientos previos.
- **Formativa:** Durante las actividades 1, 2, 3 y 4 del desarrollo, mediante observación directa, preguntas guía, revisión de hojas de trabajo y coevaluación.
- **Sumativa:** Durante los últimos 7 minutos, mediante el ticket de salida individual y la solución presentada por el equipo.

Criterios de evaluación vinculados con los objetivos

- **Identificación:** Reconoce la presencia de x^2 y distingue los términos a , b y c de una ecuación cuadrática.
- **Modelación:** Traduce correctamente los datos del problema a una ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$.
- **Resolución:** Factoriza de manera correcta, aplica el principio del producto cero y obtiene las soluciones.
- **Comprobación e interpretación:** Sustituye las soluciones en la ecuación original y explica cuál o cuáles tienen sentido en el contexto, incluyendo unidades.
- **Comunicación matemática:** Presenta un procedimiento ordenado y puede justificar por qué su respuesta es válida.

Instrumentos sugeridos

- Lista de cotejo del docente para observar modelación, factorización, comprobación y participación.
- Rúbrica breve para valorar la solución visual del reto grupal.
- Coevaluación mediante notas adhesivas durante la galería matemática.
- Ticket de salida individual para verificar comprensión y autonomía.
- Autoevaluación con escala de tres niveles: “lo puedo hacer”, “lo puedo hacer con ayuda” y “aún necesito practicar”.

Evidencias de aprendizaje

- Hoja de trabajo con el dibujo del rectángulo y la ecuación cuadrática construida.
- Procedimientos de factorización y aplicación del producto cero.
- Comprobación numérica de las soluciones.
- Cartel o solución visual del reto de modelación.

- Respuestas individuales del ticket de salida.