

<h1>Detectives del azar: explorando la probabilidad simple y condicional</h1>

Matemáticas | Estadística y Probabilidad | Aprendizaje Colaborativo

Descripción

En este plan de tres sesiones, los estudiantes investigarán cómo se puede medir y comunicar la posibilidad de que ocurra un evento. Comenzarán con situaciones cercanas, como juegos de azar, elecciones de meriendas, pronósticos del tiempo y resultados deportivos, para distinguir entre resultados seguros, posibles e imposibles. Mediante experimentos con monedas, dados, fichas y tarjetas, compararán la probabilidad teórica con la probabilidad experimental.

Posteriormente, analizarán situaciones en las que aparece información adicional. Comprenderán que la probabilidad condicional responde preguntas como: “¿Cuál es la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ya ocurrió B?”. Utilizarán tablas de doble entrada, diagramas de árbol y la expresión $P(A|B)=P(A \text{ y } B)/P(B)$, evitando interpretaciones incorrectas de los datos.

La metodología de Aprendizaje Colaborativo organizará a los estudiantes en equipos con roles rotativos: coordinador, encargado de materiales, registrador y portavoz. Cada integrante tendrá una responsabilidad individual y el grupo construirá productos comunes. Al finalizar, diseñarán y explicarán un juego o una situación real que incluya probabilidad simple y condicional, justificando sus respuestas con cálculos, representaciones y argumentos. Así desarrollarán razonamiento matemático, comunicación, toma de decisiones y lectura crítica de información cotidiana.

Objetivos de Aprendizaje

- **Calcular** la probabilidad simple de eventos equiprobables mediante fracciones, decimales y porcentajes.
- **Comparar** probabilidades teóricas y experimentales, explicando posibles diferencias mediante datos obtenidos en experimentos.
- **Representar** situaciones de probabilidad condicional usando tablas de doble entrada y diagramas de árbol.
- **Determinar** probabilidades condicionales a partir de información previa utilizando la expresión $P(A|B)=P(A \text{ y } B)/P(B)$.
- **Argumentar** decisiones y conclusiones sobre situaciones reales de azar empleando cálculos, representaciones y lenguaje probabilístico.

Recursos Necesarios

- Por cada equipo de 4 estudiantes: 2 monedas, 1 dado, 20 fichas o tapas de dos colores, 30 tarjetas numeradas, bolsa opaca, hojas cuadriculadas y calculadora.

- 180 tarjetas de roles: coordinador, encargado de materiales, registrador y portavoz.
- Hojas impresas con tablas de registro, problemas de probabilidad simple, tablas de doble entrada y diagramas de árbol.
- Papel bond o cartulina, marcadores, notas adhesivas y cinta adhesiva.
- Computadoras o tabletas, si están disponibles, con GeoGebra, Excel o Google Sheets.
- Presentación o video breve de 3 minutos sobre juegos de azar y toma de decisiones.
- Proyector, pizarra y marcadores.
- Rúbrica de proyecto, lista de cotejo, ficha de autoevaluación y ficha de coevaluación.

Requisitos Previos

- Reconocer fracciones, decimales y porcentajes sencillos.
- Interpretar operaciones básicas con números naturales y fracciones.
- Leer tablas y organizar datos en listas o frecuencias.
- Comprender expresiones como “evento”, “resultado posible” y “frecuencia”.
- Haber trabajado previamente con representación gráfica de datos y promedio simple.
- Participar respetuosamente en equipos y registrar procedimientos matemáticos.

Actividades

Sesión 1: El azar bajo la lupa

Fase de Inicio

Tiempo estimado: 10 minutos.

Propósito de la sesión

Introducir la probabilidad simple y relacionarla con situaciones de juego y decisiones cotidianas.

Activación de conocimientos previos

Docente: Muestra una moneda y pregunta: “Si la lanzo una vez, ¿qué resultados pueden ocurrir? ¿Es seguro obtener cara? ¿Es posible obtener cara? ¿Cuál creen que es la probabilidad?”. Registra las respuestas sin corregirlas todavía.

Estudiantes: Responden individualmente en una nota adhesiva y luego comentan con su pareja.

Motivación y contextualización

Docente: Presenta el reto: “Un juego ofrece ganar un premio si sale un número par en un dado. ¿Es un juego justo?”. Explica que la probabilidad ayuda a tomar decisiones en juegos, encuestas, deportes y pronósticos.

Estudiantes: Votan si aceptarían jugar y justifican brevemente su decisión.

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado: 220 minutos.

Presentación colaborativa del contenido

Docente: Forma equipos de cuatro y asigna roles. Entrega una tarjeta con los roles y explica: “Todos deben comprender el procedimiento; el portavoz no puede responder si el equipo no puede explicar el cálculo”. Presenta la idea de espacio muestral, evento y probabilidad teórica: **$P(A) = \text{casos favorables} / \text{casos posibles}$** .

Con una bolsa de 3 fichas rojas y 2 azules pregunta: “¿Cuál es la probabilidad de extraer una ficha roja?”. Los equipos construyen la respuesta antes de escuchar la formalización.

Actividad 1: Laboratorio de monedas y dados

Objetivo: Calcular y comparar probabilidades simples (objetivos 1 y 2).

Tiempo estimado: 65 minutos.

- **Docente:** Entrega monedas y dados y solicita registrar una predicción antes de experimentar.
- **Estudiantes:** En equipos, lanzan una moneda 40 veces y un dado 60 veces. Registran cada resultado en una tabla de frecuencia.
- Calculan la frecuencia relativa de cara, sello, número par, número mayor que 4 y número 1.
- Calculan la probabilidad teórica de cada evento y comparan ambos valores.
- Escriben una conclusión usando la frase: “La diferencia entre la probabilidad experimental y la teórica puede explicarse porque...”.

Docente: Pregunta: “¿Qué ocurre si aumentamos el número de lanzamientos?”, “¿La probabilidad teórica cambia porque obtuvimos muchos resultados iguales?”. Observa registros y corrige confusiones entre frecuencia y probabilidad.

Evidencia: Tabla completa, cálculos y conclusión escrita.

Actividad 2: Rompecabezas de espacios muestrales

Objetivo: Identificar casos favorables y casos posibles (objetivo 1).

Tiempo estimado: 65 minutos.

- **Docente:** Entrega a cada equipo tarjetas con situaciones: extraer una vocal de la palabra MATEMÁTICAS, obtener suma 7 al lanzar dos dados, elegir una camiseta entre colores disponibles y sacar una ficha de una bolsa.
- **Estudiantes:** Ordenan las tarjetas en “espacio muestral”, “evento” y “probabilidad”.
- Representan cada situación mediante lista, tabla o diagrama de árbol.
- Resuelven: “¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma par con dos dados?”.
- El portavoz explica un caso y otro integrante responde una pregunta del grupo visitante.

Docente: Pregunta: “¿Contaron todos los resultados posibles?”, “¿Son igualmente probables?”, “¿Por qué el orden importa en dos lanzamientos?”.

Evidencia: Organizador de cada situación y explicación oral.

Actividad 3: ¿Juego justo?

Objetivo: Argumentar decisiones usando probabilidad (objetivo 5).

Tiempo estimado: 70 minutos.

- **Docente:** Presenta tres juegos: ganar con número par; ganar si una moneda muestra dos caras en dos lanzamientos; ganar si se extrae una ficha roja de una bolsa con 5 rojas y 5 azules.
- **Estudiantes:** Calculan la probabilidad de ganar en cada juego y clasifican cada uno como favorable, poco favorable o equilibrado según el criterio acordado.
- Diseñan una modificación para que uno de los juegos sea más justo.
- Elaboran un cartel con reglas, probabilidades y recomendación.
- Realizan una galería: observan dos carteles y dejan una pregunta o sugerencia.

Docente: Verifica que las recomendaciones se basen en cálculos y no solo en opiniones.

Diferenciación y transición

Quienes necesiten apoyo reciben espacios muestrales parcialmente elaborados, fichas de colores y una plantilla con “casos favorables/casos posibles”. Quienes terminen antes calculan probabilidades de eventos complementarios. Para pasar a la siguiente actividad, cada equipo conserva su tabla y explica en un minuto el procedimiento utilizado.

Fase de Cierre

Tiempo estimado: 10 minutos.

Síntesis y reflexión

Estudiantes: Completan un ticket de salida: “Hoy aprendí que...”, “La probabilidad de obtener un número mayor que 4 en un dado es... porque...”, y “Una diferencia entre probabilidad teórica y experimental es...”.

Docente: Revisa tres respuestas, brinda retroalimentación inmediata y aclara errores frecuentes.

Transferencia

El docente anticipa: “En la siguiente sesión analizaremos qué ocurre cuando conocemos información adicional”. Como reto, los estudiantes observan una situación familiar donde se use “sabiendo que” y la escriben sin resolverla.

Sesión 2: Cuando aparece nueva información

Fase de Inicio

Tiempo estimado: 10 minutos.

Propósito de la sesión

Comprender que la probabilidad puede cambiar cuando se conoce una condición o información previa.

Activación de conocimientos previos

Docente: Recupera el reto anterior y pregunta: “En un grupo hay 12 estudiantes: 7 practican fútbol y 5 practican baloncesto; 4 de quienes practican fútbol usan lentes. Si sabemos que una persona practica fútbol, ¿cambia la posibilidad de que use lentes?”.

Estudiantes: Dan una estimación, explican qué datos usarían y comparan respuestas con su equipo.

Motivación y contextualización

El docente plantea: “Una aplicación recomienda una canción después de conocer tus preferencias. ¿La recomendación usa todos los usuarios o solo quienes tienen gustos parecidos?”. Se relaciona el tema con encuestas, deportes, diagnósticos y recomendaciones digitales, señalando que una condición debe interpretarse con cuidado.

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado: 220 minutos.

Presentación colaborativa del contenido

Docente: Presenta una tabla con 20 estudiantes: 12 llevan fruta, 8 no; de quienes llevan fruta, 9 prefieren jugo. Pregunta: “Si sabemos que lleva fruta, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera jugo?”. Los equipos marcan solo el grupo condicionado, cuentan los casos favorables y construyen $P(\text{jugo}|\text{fruta})=9/12$.

Actividad 1: Tablas que cuentan historias

Objetivo: Interpretar probabilidades condicionales en tablas de doble entrada (objetivos 3 y 4).

Tiempo estimado: 70 minutos.

- **Docente:** Entrega datos ficticios de 40 estudiantes sobre transporte y puntualidad.
- **Estudiantes:** Completan la tabla: 18 llegan en autobús, 12 caminando y 10 en bicicleta; 15 estudiantes llegan puntuales; dentro del grupo del autobús, 10 son puntuales; dentro del grupo caminando, 4 son puntuales.
- Calculan $P(\text{puntual})$, $P(\text{autobús})$, $P(\text{puntual}|\text{autobús})$ y $P(\text{autobús}|\text{puntual})$.
- Responden: “¿Son iguales $P(\text{puntual}|\text{autobús})$ y $P(\text{autobús}|\text{puntual})$? ¿Por qué?”.
- Elaboran una oración interpretativa para cada resultado.

Docente: Pregunta: “¿Cuál es ahora el total que funciona como denominador?”, “¿Qué información queda fuera cuando aparece la condición?”.

Evidencia: Tabla, cálculos y respuestas argumentadas.

Actividad 2: Caminos de decisiones

Objetivo: Representar situaciones condicionales con diagramas de árbol (objetivo 3).

Tiempo estimado: 70 minutos.

- **Docente:** Modela solamente el primer paso de un árbol con una bolsa que contiene fichas rojas y azules. Indica: “Dibujen primero la condición y después los resultados posibles”.

- **Estudiantes:** Construyen árboles para: elegir merienda y bebida; lanzar una moneda dos veces; y seleccionar estudiantes por curso y participación deportiva.
- Escriben las probabilidades en cada rama y calculan una probabilidad conjunta multiplicando las ramas correspondientes.
- Intercambian el árbol con otro equipo, que revisa si están incluidos todos los caminos.

Docente: Observa si diferencian “y” de “o” y pregunta: “¿Qué camino representa exactamente el evento solicitado?”.

Evidencia: Tres diagramas revisados por pares.

Actividad 3: Detectives de afirmaciones

Objetivo: Argumentar y detectar interpretaciones incorrectas (objetivo 5).

Tiempo estimado: 80 minutos.

- **Docente:** Entrega afirmaciones como: “Si la mayoría de quienes usan bicicleta llegan puntuales, entonces la mayoría de quienes llegan puntuales usa bicicleta”.
- **Estudiantes:** Clasifican cada afirmación como verdadera, falsa o “no se puede saber” usando una tabla de datos.
- Escriben una corrección cuando sea falsa y la justifican con dos valores de la tabla.
- Presentan un caso al grupo y responden preguntas.

Docente: Recalca que cambiar la condición cambia el grupo de referencia y el denominador.

Diferenciación y transición

Para quienes necesitan apoyo se ofrecen tablas con totales destacados, colores para filas y columnas, y la frase guía “De todos los que...”. Quienes terminan antes inventan dos eventos cuya probabilidad condicional sea diferente al invertir la condición. La transición se realiza mediante una pregunta común: “¿Podemos resolver estos casos sin organizar primero los datos?”.

Fase de Cierre

Tiempo estimado: 10 minutos.

Síntesis y reflexión

Estudiantes: Elaboran un resumen de tres pasos: “1. Identifico la condición; 2. reduzco el espacio de referencia; 3. divido casos favorables entre casos condicionados”. Responden: “¿Qué significa $P(A|B)$?”, “¿Por qué puede ser diferente de $P(B|A)$?”.

Docente: Corrige colectivamente un ejemplo y entrega retroalimentación usando las preguntas: “¿Cuál es tu condición?” y “¿Cuál es tu denominador?”.

Transferencia

Cada equipo elige una situación real para su proyecto final: juego, encuesta escolar, transporte, deporte o recomendaciones. Debe incluir una probabilidad simple y otra condicional. Se anticipa que en la sesión 3 construirán y

defenderán el producto.

Sesión 3: Diseñamos y defendemos un reto probabilístico

Fase de Inicio

Tiempo estimado: 10 minutos.

Propósito de la sesión

Integrar probabilidad simple y condicional en un producto aplicado, verificando cálculos y explicaciones.

Activación de conocimientos previos

Docente: Escribe: “En una encuesta, 15 de 25 estudiantes prefieren música; de esos 15, 9 usan audífonos al estudiar”.

Pregunta: “Calculen $P(\text{música})$ y $P(\text{audífonos}|\text{música})$. ¿Qué representa cada resultado?”.

Estudiantes: Resuelven individualmente durante dos minutos y luego comparan procedimientos en su equipo.

Motivación y contextualización

El docente anuncia el desafío: “Serán consultores de datos. Deberán crear un reto que otra persona pueda resolver y comprobar”. Explica que una buena conclusión probabilística debe ser clara, verificable y útil para tomar una decisión.

Fase de Desarrollo

Tiempo estimado: 210 minutos.

Actividad 1: Diseño del reto probabilístico

Objetivo: Crear una situación con probabilidades simples y condicionales correctas (objetivos 1, 3 y 5).

Tiempo estimado: 80 minutos.

- **Docente:** Entrega una plantilla con los apartados: contexto, datos, pregunta simple, pregunta condicional, representación, solución y conclusión.
- **Estudiantes:** Eligen un contexto y construyen datos pequeños y coherentes.
- Calculan una probabilidad simple y una condicional.
- Representan los datos en tabla de doble entrada o árbol.
- Escriben una conclusión en lenguaje cotidiano, por ejemplo: “Entre quienes..., aproximadamente...”.
- Revisan que las fracciones estén simplificadas y que las probabilidades estén entre 0 y 1.

Docente: Hace preguntas guía: “¿Tu condición está claramente escrita?”, “¿El denominador corresponde al grupo condicionado?”, “¿Otra persona podría comprobar tu resultado?”.

Evidencia: Borrador completo del reto.

Actividad 2: Revisión entre equipos

Objetivo: Evaluar procedimientos y mejorar argumentos (objetivos 2, 4 y 5).

Tiempo estimado: 55 minutos.

- **Estudiantes:** Intercambian su reto con otro equipo y lo resuelven sin recibir explicaciones.
- Usan una lista de cotejo: datos suficientes, pregunta clara, cálculo simple correcto, cálculo condicional correcto, representación comprensible y conclusión justificada.
- Escriben dos fortalezas y una recomendación concreta.
- El equipo creador revisa los comentarios y corrige el producto.

Docente: Comprueba individualmente que cada integrante pueda explicar al menos un cálculo. Solicita correcciones cuando la revisión sea solo estética.

Evidencia: Reto resuelto por pares, lista de cotejo y versión corregida.

Actividad 3: Feria de soluciones

Objetivo: Comunicar y defender resultados probabilísticos (objetivo 5).

Tiempo estimado: 75 minutos.

- **Docente:** Organiza dos rondas. En cada ronda, la mitad de los equipos presenta y la otra mitad visita; luego cambian.
- **Estudiantes:** Presentan su contexto, explican una probabilidad simple, una condicional y la representación utilizada.
- Los visitantes resuelven el reto, hacen una pregunta y colocan una nota adhesiva con una observación matemática.
- El portavoz y otro integrante responden; después cambian los roles para garantizar responsabilidad compartida.

Docente: Usa la rúbrica, toma notas y ofrece retroalimentación breve con la estructura “logro, evidencia y próximo paso”.

Diferenciación y transición

Los equipos que necesitan apoyo reciben una plantilla con números sugeridos y un ejemplo incompleto. Quienes terminan antes agregan una comparación entre $P(A|B)$ y $P(B|A)$, o incluyen un pequeño experimento para comprobar su modelo. La transición al cierre ocurre cuando cada estudiante entrega una solución individual de un reto distinto al de su equipo.

Fase de Cierre

Tiempo estimado: 20 minutos.

Síntesis

Docente: Construye en la pizarra un organizador colectivo con cuatro ideas: espacio muestral, casos favorables, condición y grupo de referencia. Solicita a estudiantes voluntarios que agreguen un ejemplo a cada idea.

Reflexión metacognitiva

Estudiantes: Responden por escrito:

- “¿Cómo sé que elegí correctamente el denominador de una probabilidad condicional?”
- “¿Qué representación me ayudó más: tabla, árbol o lista? ¿Por qué?”
- “¿Qué aporté al equipo y qué necesito mejorar para explicar un procedimiento matemático?”.

Retroalimentación y transferencia

Docente: Devuelve la ficha individual con una observación sobre precisión, representación y argumentación. Cierra señalando que estas herramientas sirven para interpretar encuestas, noticias, juegos, predicciones y decisiones informadas.

Tarea o reto final

De manera opcional, cada estudiante identifica una afirmación probabilística en una noticia, publicidad o aplicación. Debe escribir qué evento se analiza, cuál es la condición —si existe— y qué información adicional necesitaría para evaluar la afirmación.

Evaluación

Estrategia de evaluación

Tipos y momentos

- **Diagnóstica:** Sesión 1, Inicio, durante la pregunta sobre la moneda y la votación del juego justo.
- **Formativa:** Sesiones 1 y 2, durante los laboratorios, tablas, diagramas, explicaciones orales, revisión entre pares y tickets de salida.
- **Sumativa:** Sesión 3, Feria de soluciones, producto grupal y resolución individual de un reto.

Criterios vinculados con los objetivos

- **Calcula probabilidades simples** identificando correctamente casos favorables y posibles. Vinculado con el objetivo 1.
- **Compara resultados teóricos y experimentales** usando frecuencias relativas y conclusiones razonables. Vinculado con el objetivo 2.
- **Representa información condicional** mediante tablas de doble entrada o diagramas de árbol. Vinculado con el objetivo 3.
- **Determina $P(A|B)$** seleccionando correctamente el grupo condicionado y el denominador. Vinculado con el objetivo 4.
- **Argumenta y comunica conclusiones** con procedimientos claros, evidencias y participación colaborativa. Vinculado con el objetivo 5.

Instrumentos sugeridos

- Lista de cotejo para tablas, cálculos y representaciones.
- Guía de observación docente para participación, roles y explicación de procedimientos.
- Rúbrica de cuatro niveles para el reto final: exactitud matemática, representación, argumentación y comunicación.
- Coevaluación del producto durante la revisión entre equipos.
- Autoevaluación individual de aprendizaje y responsabilidad compartida.

Evidencias de aprendizaje

- Registros de lanzamientos, frecuencias relativas y comparación con probabilidades teóricas.
- Organizadores de espacios muestrales y resolución de juegos justos o injustos.
- Tablas de doble entrada, diagramas de árbol y respuestas sobre $P(A|B)$ y $P(B|A)$.
- Reto probabilístico diseñado, resuelto y corregido por pares.
- Presentación oral, solución individual y reflexión metacognitiva final.