

Función cuadrática

Matemáticas | Álgebra

Descripción del Curso

Esta unidad pertenece a la asignatura Álgebra y está diseñada para estudiantes de 15 a 16 años. Unidad 8: Conversión entre forma general y forma canónica. Se centra en la conversión entre la forma general de una función cuadrática y su forma canónica (vértice) y en cómo usar esta conversión para identificar el vértice, el eje de simetría y la anchura de la parábola. Mediante el proceso de completar el cuadrado se obtiene la forma canónica a partir de $y = ax^2 + bx + c$ y, a su vez, se recupera la forma general a partir de la forma canónica. La unidad fortalece la conexión entre las dos representaciones y su utilidad para el análisis gráfico y la resolución de problemas. Se trabajan ejemplos, gráficos y ejercicios de contextualización: por qué ciertos valores de a determinan la apertura de la parábola y cómo cambia el vértice y el eje de simetría al variar b y c . Al finalizar, el estudiante debe ser capaz de interpretar, comparar y justificar elecciones entre representaciones para interpretar situaciones reales, como optimización de recursos, modelado de trayectorias o determinación de máximos y mínimos. La evaluación combina ejercicios de conversión, problemas de interpretación de gráficos y autoevaluación de estrategias de resolución.

Competencias

- Comprender y aplicar la conversión entre la forma general y la forma canónica de funciones cuadráticas y justificar su uso en la interpretación de gráficos. - Identificar el vértice (h, k) , el eje de simetría y la anchura de la parábola a partir de las dos representaciones y comprender su relación con los coeficientes. - Analizar y comparar diferentes representaciones para resolver problemas prácticos que involucren optimización, estimación de máximos/mínimos y lectura de gráficos. - Desarrollar estrategias de resolución de problemas que integren teoría y gráfica, favoreciendo la transferencia a situaciones reales.

Requerimientos

- Participación activa en clase y realización de ejercicios de conversión entre formas. - Uso de calculadora básica o software de gráficos para verificar resultados y visualizar parábolas. - Material de apoyo (cuaderno, reglas y fichas de ejercicios) para practicar completar el cuadrado. - Realizar al menos 6 ejercicios de conversión y análisis de vértice y eje, con retroalimentación del docente. - Compromiso de entrega de tareas y autoevaluación de estrategias de resolución.

Unidades del Curso

Unidad 1: Unidad 1: Forma general y coeficientes a , b y c

Objetivos de Aprendizaje

- Identificar qué representan los coeficientes a , b y c en la ecuación y su relación con la apertura, el eje de simetría y la intersección con el eje y .
- Describir cómo la apertura de la parábola (si abre hacia arriba o hacia abajo) depende de a , y cómo b y c afectan la posición vertical y la simetría.
- Explicar y localizar el eje de simetría $x = -b/(2a)$ y la intersección con el eje y en $(0, c)$.

Contenidos Temáticos

1. **Tema 1:** Ecuación cuadrática en forma general y papel de a , b y c . Descripción de la apertura, eje de simetría y valores de intersección.
2. **Tema 2:** Apertura y eje de simetría de la parábola. Cómo cambia la parábola al modificar a y el papel de b y c .
3. **Tema 3:** Interceptos con los ejes. Intersección con el eje y en $(0, c)$ y condiciones para las intersecciones con el eje x .

Actividades

- **Actividad 1: Exploración de coeficientes** Analizar diferentes ecuaciones y predecir la apertura y la posición de la parábola a partir de a , b y c . Punto clave: identificar qué cambia cuando se modifica cada coeficiente y justificarlo con ejemplos.
- **Actividad 2: Cálculo del eje de simetría y el intercepto en y** Calcular $x = -b/(2a)$ y el intercepto en y para varias ecuaciones y dibujar la gráfica aproximada en cuaderno o pizarra digital.
- **Actividad 3: Comparación de gráficas** Con parejas, comparar gráficas dadas con distintas (a, b, c) y explicar las diferencias en apertura, anchura y posición.
- **Actividad 4: Discusión guiada** Debatir cómo cambian las soluciones (raíces) al variar c , manteniendo a y b fijos, y recoger conclusiones en un diario de aprendizaje.

Evaluación

La evaluación de la unidad se orienta a verificar el entendimiento de la forma general y el efecto de sus coeficientes.

Se adhiere a los siguientes criterios:

- Identificar correctamente a , b y c en una ecuación dada y describir su efecto en la gráfica (apertura, eje de simetría, intercepto y número de soluciones).
- Calcular el eje de simetría y el intercepto en y para distintas ecuaciones y justificar las respuestas.
- Resolver ejercicios cortos con justificación escrita sobre cómo cambian la gráfica al modificar cada coeficiente.

Unidad 2: Unidad 2: Representación gráfica a partir de la forma general

Objetivos de Aprendizaje

- Determinar el vértice de la parábola a partir de a , b y c y su coordenada exacta.

- Construir tablas de valores adecuadas para trazar la gráfica con precisión, seleccionando x- valores significativos.
- Convertir la ecuación a la forma canónica ($y = a(x - h)^2 + k$) para facilitar el trazado y la interpretación.

Contenidos Temáticos

1. **Tema 1:** Determinación del vértice a partir de a, b y c y su interpretación geométrica.
2. **Tema 2:** Tablas de valores para la gráfica. Estrategias para escoger pares (x, y) significativos.
3. **Tema 3:** Conversión a la forma canónica y uso práctico para trazar la parábola.

Actividades

- **Actividad 1: Cálculo del vértice** Dado $y = ax^2 + bx + c$, calcular $h = -b/(2a)$ y $k = f(h)$. Dibujar la parábola centrada en el vértice en una malla.
- **Actividad 2: Construcción de tablas** Elaborar tablas de valores con x en intervalos pertinentes y trazar puntos para obtener una gráfica precisa.
- **Actividad 3: Conversión a forma canónica** Transformar la ecuación a $y = a(x - h)^2 + k$ y comparar con la gráfica obtenida.
- **Actividad 4: Aplicación con software** Usar GeoGebra u otra herramienta para verificar la gráfica a partir de la forma general y de la forma canónica.

Evaluación

Evaluación centrada en la capacidad de representar gráficamente a partir de la forma general y en la utilización de vértice y/o tablas:

- Problemas de cálculo de vértice y construcción de la gráfica
- Diplomado de conversión entre forma general y forma canónica
- Actividad de comparación entre graficación en papel y en software

Unidad 3: Unidad 3: Vértice y eje de simetría y ubicación en el plano

Objetivos de Aprendizaje

- Calcular el vértice (h, k) usando $h = -b/(2a)$ y $k = f(h)$.
- Identificar el eje de simetría $x = -b/(2a)$ y su significado geométrico.
- Ubicar la parábola en el plano según el signo de a y la posición del vértice.

Contenidos Temáticos

1. **Tema 1:** Cálculo y significado del vértice (h, k) y su relación con la dirección de la apertura.
2. **Tema 2:** Eje de simetría $x = -b/(2a)$ y su interpretación gráfica.
3. **Tema 3:** Ubicación de la parábola en el plano y lectura de su posición relativa al plano cartesiano.

4. **Tema 4:** Casos prácticos con $a > 0$ y $a < 0$ para entender la orientación de la gráfica.

Actividades

- **Actividad 1: Cálculo del vértice en diferentes ecuaciones** Utilizar la fórmula del vértice y representar la parábola en un sistema de cuadrícula para ubicarla correctamente.
- **Actividad 2: Identificación del eje de simetría** Determinar y explicar la posición del eje de simetría para varias funciones cuadráticas; discutir su relación con el vértice.
- **Actividad 3: Ubicación en el plano** Dibujo guiado de parábolas en el plano cartesiano y verificación con una tabla de valores.
- **Actividad 4: Análisis de casos** Explorar pares (a, b, c) que produzcan apertura hacia arriba y hacia abajo y describir las diferencias en la ubicación.

Evaluación

Evaluación centrada en la capacidad para ubicar y describir la parábola en el plano:

- Calcular vértice y eje de simetría y describir la ubicación en el plano.
- Explicar, con ejemplos, cómo cambia la posición de la parábola al modificar a , b y c .
- Resolver ejercicios de ubicación en el plano con justificación.

Unidad 4: Intersecciones y raíces: eje y y eje x

Objetivos de Aprendizaje

- Determinar el intercepto con el eje y analizando $y(0) = c$.
- Resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ para obtener las raíces, utilizando factorización, completar el cuadrado o la fórmula cuadrática.
- Clasificar las intersecciones según el número de soluciones según el discriminante cuando se resuelve la ecuación cuadrática.

Contenidos Temáticos

1. **Tema 1:** Intersección con el eje y: $y(0) = c$ y su significado geométrico.
2. **Tema 2:** Raíces de la ecuación cuadrática: cuándo existen, cuántas y dónde se ubican en el eje x.
3. **Tema 3:** Métodos de resolución: factorización, completar el cuadrado y fórmula cuadrática.

Actividades

- **Actividad 1: Interceptos con el eje y** Calcular $y(0)$ para varias ecuaciones y verificar el punto en la gráfica.
- **Actividad 2: Búsqueda de raíces** Resolver $ax^2 + bx + c = 0$ por factorización, completando el cuadrado y usando la fórmula cuadrática.

- **Actividad 3: Discriminante** Analizar $D = b^2 - 4ac$ para distintos ejemplos y justificar el número de soluciones reales.
- **Actividad 4: Taller de graficación** Graficar las funciones cuadráticas y verificar las intersecciones con ambos ejes mediante tablas de valores.

Evaluación

La evaluación considera la capacidad de determinar interceptos y raíces y justificar el número de soluciones:

- Resolver ejercicios de intersección con el eje y y soluciones en x, explicando el proceso.
- Aplicar las tres técnicas de resolución y comparar resultados.
- Explicar el significado de D y cuántas soluciones reales existen para cada caso.

Unidad 5: Resolución de ecuaciones cuadráticas y discriminante

Objetivos de Aprendizaje

- Aplicar la fórmula cuadrática para obtener las soluciones cuando $D \geq 0$.
- Identificar casos con $D > 0$, $D = 0$ y $D < 0$ y justificar el número de soluciones reales.
- Relacionar las soluciones con la gráfica de la parábola (puntos de corte con el eje x).

Contenidos Temáticos

1. **Tema 1:** Discriminante $D = b^2 - 4ac$ y su interpretación geométrica.
2. **Tema 2:** Casos de soluciones: dos reales, una real (solución doble) o complejas.
3. **Tema 3:** Métodos para obtener soluciones: fórmula cuadrática y verificación.

Actividades

- **Actividad 1: Clasificación por discriminante** Dados varios trinomios, calcular D y clasificar el número de soluciones, con justificación.
- **Actividad 2: Uso de la fórmula cuadrática** Resolver ecuaciones cuadráticas y comprobar soluciones en la gráfica.
- **Actividad 3: Ejercicios de verificación** Comprobar soluciones sustituyendo en la ecuación original y en la gráfica.
- **Actividad 4: Problema contextual** Resolver una situación real que derive en una ecuación cuadrática y justificar soluciones reales.

Evaluación

Evaluación centrada en la correcta clasificación de soluciones y en la capacidad de aplicar la fórmula cuadrática cuando $D \geq 0$.

- Ejercicios de discriminante y clasificación.

- Resolución de ecuaciones con verificación de soluciones.
- Explicación oral/escrita de por qué no hay soluciones reales cuando $D < 0$ (con breve mención de números complejos si corresponde).

Unidad 6: Modelos reales con funciones cuadráticas

Objetivos de Aprendizaje

- Modelar una situación real con una función cuadrática y hallar soluciones relevantes.
- Interpretar el significado de la solución en el contexto (velocidad, tiempo, área, costo, etc.).
- Justificar la elección de la solución óptima en problemas de optimización o de maximización/minimización.

Contenidos Temáticos

1. **Tema 1:** Movimiento y tiro parabólico: interpretación de la altura frente al tiempo.
2. **Tema 2:** Optimización de áreas o ganancias: encontrar máximos y mínimos de una función cuadrática.
3. **Tema 3:** Aplicaciones en áreas y costos: modelar escenarios de negocio o geometría.

Actividades

- **Actividad 1: Modelización de movimiento** Construir un modelo de tiro parabólico simple y interpretar el vértice como punto de altura máxima o mínima, dependiendo de la dirección.
- **Actividad 2: Optimización** Plantear problemas de área o ganancia y hallar el valor de x que maximiza o minimiza la función cuadrática.
- **Actividad 3: Problemas de costo** Modelar costos y beneficios lineales y cuadráticos para extraer conclusiones sobre decisiones óptimas.
- **Actividad 4: Presentación de caso** Preparar una breve presentación donde se explique la aplicación elegida, las soluciones y la interpretación del resultado.

Evaluación

Evaluación basada en la capacidad de plantear un modelo correcto y justificar las soluciones en el contexto real:

- Problemas de modelado y solución de la función cuadrática resultante.
- Interpretación contextual de la solución (qué significa en el mundo real).
- Justificación de la solución óptima en problemas de optimización.

Unidad 7: Cambios en la gráfica al modificar a , b y c

Objetivos de Aprendizaje

- Describir el efecto de a en la apertura y la anchura de la parábola.

- Describir el efecto de b en el eje de simetría y en la ubicación horizontal del gráfico.
- Describir el efecto de c en el intercepto con el eje y y en la posición vertical de la parábola.

Contenidos Temáticos

1. **Tema 1:** Efecto de a en apertura y anchura. Parábolas con $a > 0$ y $a < 0$.
2. **Tema 2:** Efecto de b en el eje de simetría y desplazamiento horizontal.
3. **Tema 3:** Efecto de c en el intercepto en y y en la vertical de la parábola.
4. **Tema 4:** Resumen de efectos y predicción de cambios en la gráfica y en el número de soluciones.

Actividades

- **Actividad 1: Experimentos con parámetros** Alterar a , b y c en varias ecuaciones y observar cambios en la gráfica y en las soluciones.
- **Actividad 2: Tabla de comparación** Crear tablas que muestren cambios graduales en cada coeficiente y describir las tendencias.
- **Actividad 3: Deducción guiada** Resolver una serie de ejercicios en los que se pide predecir la gráfica antes de graficarla y justificar las predicciones.
- **Actividad 4: Presentación de conclusiones** Preparar un informe corto con ejemplos, conclusiones y una guía de "qué cambia" ante cada coeficiente.

Evaluación

Evaluación centrada en la capacidad para predecir y justificar cambios en la gráfica ante modificaciones de a , b y c :

- Ejercicios de predicción de la forma de la parábola a partir de cambios en los coeficientes.
- Explicación escrita de cómo cambia el eje de simetría y la apertura al variar cada coeficiente.
- Mini-proyecto de comparación de gráficas con distintos conjuntos de coeficientes.

Unidad 8: Conversión entre forma general y forma canónica

Objetivos de Aprendizaje

- Convertir $y = ax^2 + bx + c$ a la forma canónica y recuperar la forma general a partir de ésta.
- Identificar el vértice (h, k) y el eje de simetría a partir de la forma canónica y de la forma general.
- Analizar la anchura de la parábola a partir del valor de a y compararla entre diferentes representaciones.

Contenidos Temáticos

1. **Tema 1:** Métodos de conversión entre forma general y forma canónica (completar el cuadrado y reexpresar).
2. **Tema 2:** Identificación del vértice y del eje de simetría desde cada forma.
3. **Tema 3:** Interpretación de la anchura y relación con el coeficiente a .

4. **Tema 4:** Práctica de conversión y verificación en ejemplos variados.

Actividades

- **Actividad 1: Conversión paso a paso** Tomar una ecuación y convertirla entre la forma general y la forma canónica mediante completar el cuadrado, mostrando cada paso.
- **Actividad 2: Identificación de vértice y eje** Extraer vértice y eje de simetría desde ambas formas y comparar resultados.
- **Actividad 3: Análisis de anchura** Comparar gráficas con valores de a distintos y explicar la relación con la forma canónica.
- **Actividad 4: Sesión de revisión** Resolver una batería de ejercicios para afianzar la conversión y las identificaciones clave.

Evaluación

Evaluación centrada en la capacidad de convertir entre formas, identificar vértice y eje de simetría y analizar la anchura de la parábola:

- Ejercicios de conversión entre general y canónica con verificación de resultados.
- Problemas que exijan identificar vértice y eje a partir de la forma canónica y general.
- Comparación de gráficas para confirmar la consistencia entre representaciones.