

Introducción a la cartografía matemática

Ciencias Exactas y Naturales | Matemáticas

Descripción del Curso

Esta unidad forma parte del curso Matemáticas para estudiantes mayores de 17 años y aborda las funciones inversas y la verificación de la inversión. En Unidad 3: Funciones inversas y verificación de la inversión, se estudian las condiciones de invertibilidad, los métodos para hallar inversas y la verificación de la inversión mediante las identidades $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(y)) = y$. Se trabajará con ejemplos de funciones biyectivas y se discuten las restricciones de dominio necesarias para invertir, así como la interpretación geométrica y algebraica de las operaciones. El enfoque combina teoría y práctica, con énfasis en el razonamiento lógico, la notación limpia y la interpretación de dominios y codominios. A través de actividades guiadas, ejercicios de resolución y análisis de casos, el estudiante aprenderá a identificar cuándo una función es invertible, a determinar su inversa y a verificar la inversión de forma rigurosa. Se subraya la conexión entre conceptos abstractos y su aplicación en contextos reales de ciencias, tecnología, economía e ingeniería, favoreciendo la transferencia de conocimiento a situaciones de modelado y toma de decisiones. La unidad invita a reflexionar sobre posibles restricciones de dominio que afecten la invertibilidad y a valorar la importancia de la verificación para garantizar resultados correctos.

Competencias

- Identificar condiciones de invertibilidad y justificar por qué una función es biyectiva en un contexto dado.
- Determinar la función inversa cuando exista y describir de manera clara el dominio y codominio de la inversa.
- Verificar la inversión utilizando las identidades $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(y)) = y$ con precisión lógica y notación adecuada.
- Analizar y discutir restricciones de dominio que pueden impedir o limitar la inversión de una función.
- Aplicar conceptos de funciones inversas a problemas reales de modelado en ciencias, ingeniería, economía y otras áreas.
- Comunicar razonamientos matemáticos de forma clara y justificar cada paso de la inversión y su verificación.
- Operar de manera colaborativa para resolver ejercicios complejos y usar herramientas tecnológicas para visualizar funciones y sus inversas.
- Desarrollar pensamiento crítico para identificar errores comunes en la manipulación de inversas e interpretar resultados.

Requerimientos

- Conocimientos previos sobre funciones, dominios y codominios, composición de funciones y notación matemática básica.

- Capacidad para analizar gráficos y algebraicamente identificar si una función es invertible (bijección).
- Acceso a calculadora científica o software básico para verificar inversas y realizar operaciones de composición.
- Disposición para trabajar en ejercicios prácticos, participar en discusiones y entregar prácticas de forma regular.
- Lecturas y ejercicios previos de la unidad para preparar la sesión de aprendizaje y las evaluaciones.

Unidades del Curso

Unidad 1: Unidad 1: Dominio y codominio en funciones

Objetivos de Aprendizaje

- Definir claramente dominio y codominio y explicar la diferencia entre entradas y salidas de una función.
- Identificar dominio y codominio a partir de una función dada por regla, tabla o representación gráfica.
- Reconocer restricciones de dominio y justificar la validez de las entradas para una función dada.

Contenidos Temáticos

1. **Tema 1:** Dominio y codominio. Descripción corta: conceptos fundamentales y diferencias entre el conjunto de entrada y el conjunto de salidas potenciales.
2. **Tema 2:** Representaciones de funciones y dominio/codominio. Descripción corta: cómo distinguir dominio y codominio cuando la función se da por regla, tabla o gráfica.
3. **Tema 3:** Restricciones de dominio y ejemplos comunes. Descripción corta: funciones con restricciones (raíces, logaritmos, condiciones de definibilidad) y justificativas.

Actividades

- **Actividad 1:** Exploración guiada para identificar dominio y codominio en funciones dadas por regla, tabla o gráfica. Se presentan varios ejemplos y se solicita justificar las elecciones de dominio y codominio.
- **Actividad 2:** Clasificación de representaciones: los estudiantes deben indicar el dominio y el codominio a partir de funciones que se muestran en distintas representaciones y justificar por qué cada conjunto es el correcto.
- **Actividad 3:** Problemas con restricciones de dominio: resolver ejercicios donde la función no está definida para ciertos valores y explicar la razón (raíz negativa, logaritmo de no positivo, etc.).
- **Actividad 4:** Mini taller de pares (dominio vs codominio): crear funciones simples y proponer diferentes codominios, discutiendo qué sucede si se elige un codominio demasiado grande o demasiado pequeño.

Evaluación

La evaluación se alinea con el Objetivo General y los Objetivos Específicos. Se emplearán:

- Ejercicios de identificación de dominio y codominio a partir de funciones dadas (problemas de clase y tarea).

- Preguntas cortas para justificar por qué cierto valor pertenece o no al dominio y por qué el codominio propuesto es adecuado.
- Participación y claridad en las actividades de aprendizaje activo.

Unidad 2: Composición de mapas y dominio de la composición

Objetivos de Aprendizaje

- Definir la composición de funciones y la notación $g \circ f$.
- Construir correctamente la función $g \circ f$ a partir de $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ y especificar su dominio y codominio.
- Resolver ejemplos numéricos para practicar la determinación de dominio y codominio de la composición.

Contenidos Temáticos

1. **Tema 1:** Definición y notación de la composición de funciones. Descripción corta: qué significa $g \circ f$ y cómo se computa a partir de pares de funciones.
2. **Tema 2:** Dominio y codominio de la composición. Descripción corta: cómo se determina el dominio de $g \circ f$ a partir de los dominios de f y g .
3. **Tema 3:** Ejemplos numéricos de composición. Descripción corta: cálculos paso a paso para varios pares de funciones.

Actividades

- **Actividad 1:** Taller de construcción de $g \circ f$ con funciones dadas por regla y por tablas. Se determina el dominio y el codominio de la composición y se discuten posibles restricciones.
- **Actividad 2:** Análisis de dominiones: dado f y g , identificar el dominio de la composición y justificarlo con argumentos.
- **Actividad 3:** Ejercicios numéricos: calcular $g \circ f$ para valores específicos y verificar la coherencia de dominio/codominio.
- **Actividad 4:** Resolución de problemas en los que una de las funciones tenga dominio restringido y discutir el impacto en la composición.

Evaluación

La evaluación considera la capacidad de construir $g \circ f$ correctamente y de determinar su dominio y codominio. Se evaluarán:

- Ejercicios de composición con confirmación de dominio/codominio.
- Problemas con interpretación y verificación de resultados numéricos.
- Participación y claridad en las actividades de aprendizaje activo.

Unidad 3: Funciones inversas y verificación de la inversión

Objetivos de Aprendizaje

- Identificar si una función es invertible (bijectiva) y explicar por qué.
- Determinar la función inversa cuando exista, y describir el dominio y codominio de la inversa.
- Verificar la inversión utilizando las identidades $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(y)) = y$.

Contenidos Temáticos

1. **Tema 1:** Inversas y condiciones de invertibilidad. Descripción corta: cuándo una función tiene inversa y qué significa ser bijectiva.
2. **Tema 2:** Cálculo de inversas para funciones simples. Descripción corta: métodos para hallar la inversa en funciones lineales y algunas funciones elementales con dominio adecuado.
3. **Tema 3:** Verificación de la inversión. Descripción corta: uso de las identidades para comprobar que una inversa está correcta.

Actividades

- **Actividad 1:** Análisis de invertibilidad: determinar si f es invertible y justificar la respuesta.
- **Actividad 2:** Cálculo de la inversa de funciones lineales y ejemplos simples: $f(x) = ax + b$ con $a \neq 0$; otros ejemplos que sean invertibles con dominio restringido.
- **Actividad 3:** Verificación de inversión mediante las igualdades: para cada función y su posible inversa, comprobar $f^{-1}(f(x))$ y $f(f^{-1}(y))$.
- **Actividad 4:** Discusión guiada sobre cuándo es necesario restringir el dominio para obtener una inversa única y cómo se determina este dominio.

Evaluación

La evaluación se centrará en la capacidad de identificar invertibilidad, encontrar la inversa cuando exista y verificar la inversión. Se evaluarán:

- Problemas de inversión que requieren hallar la inversa y justificar el dominio/codominio de la inversa.
- Verificación de la inversión mediante las identidades correspondientes con ejemplos numéricos.
- Participación y claridad en las actividades de aprendizaje activo.