

Funciones reales: dominio, imagen y representación gráfica

Matemáticas | Trigonometría

Descripción del Curso

Este curso de Trigonometría está diseñado para estudiantes de 15 a 16 años, con foco en comprender y aplicar las funciones trigonométricas, sus gráficas y transformaciones. A lo largo de las unidades, el alumnado desarrollará habilidades para analizar, modelar y comunicar ideas matemáticas, fortaleciendo el razonamiento lógico y la resolución de problemas en contextos reales. En particular, la Unidad 4, Transformaciones de funciones y efectos en dominio e imagen, se centra en las transformaciones simples de funciones (traslaciones, reflexiones, estiramientos y compresiones) y su impacto en el dominio y la imagen. Se representa gráficamente cada transformación y se analiza cómo cambian las regiones de definición y los rangos de la función.

Describir cómo las transformaciones simples de funciones (traslaciones, reflexiones, estiramientos y compresiones) afectan el dominio y la imagen, y representar estos cambios en la gráfica correspondiente.

Entre sus objetivos específicos se encuentran: identificar el efecto de traslaciones y reflexiones sobre la gráfica y su dominio/imagen; analizar estiramientos y compresiones (verticales y horizontales) y su influencia en el dominio e imagen, especialmente cuando la función original tiene restricciones; representar visualmente transformaciones y justificar los cambios observados en dominio e imagen.

En esta unidad se combinan conceptos teóricos con representación gráfica y análisis de casos prácticos, promoviendo que el alumnado pueda trasladar lo aprendido a situaciones de modelado y resolución de problemas involucrando funciones trigonométricas y sus transformaciones.

Competencias

- Comprender y explicar conceptual y procedimentalmente transformaciones de funciones y sus efectos en dominio e imagen.
- Representar gráficamente transformaciones y justificar los cambios observados en la definición y el rango de la función.
- Aplicar transformaciones para adaptar funciones a restricciones y contextos reales, fortaleciendo habilidades de modelado.
- Analizar críticamente datos y funciones para interpretar resultados y comunicar conclusiones con lenguaje matemático claro.
- Trabajar de manera colaborativa para resolver problemas de trigonometría que involucren transformaciones y gráficos.

Requerimientos

- Conocimientos previos de funciones básicas, gráfica y conceptos de dominio y rango aplicables a funciones simples.
- Conocimiento básico de funciones trigonométricas (sen, cos, tan) y sus gráficas fundamentales.
- Habilidad para interpretar y representar gráficas, así como para justificar cambios en dominio e imagen.
- Materiales: cuaderno o libreta, lápiz, calculadora científica y acceso a herramientas de graficación (opcional software o apps).
- Participación activa en clase, realización de ejercicios de práctica y entrega de actividades de graficación y análisis.

Unidades del Curso

Unidad 1: Dominio de funciones reales (expresión, tablas y gráficos)

Objetivos de Aprendizaje

- Definir dominio y describir sus límites y su relación con la función dada.
- Determinar el dominio de expresiones algebraicas que incluyen denominadores, raíces y/o logaritmos, identificando restricciones válidas.
- Determinar el dominio a partir de tablas de valores y/o gráficos simples, reconociendo para qué valores de x la función está definida.

Contenidos Temáticos

1. Tema 1: Dominio de expresiones algebraicas

Descripción corta: restricciones por denominadores nulos, raíces pares y logaritmos; uso de intervalos para expresar dominio.

2. Tema 2: Dominio a partir de tablas y gráficos

Descripción corta: interpretación de valores de x que permiten definir la función a partir de tablas o gráficos dados.

3. Tema 3: Notación de intervalos y representación en la recta numérica

Descripción corta: uso de intervalos, la recta numérica y notación de límites abiertos/cerrados para describir el dominio.

Actividades

- Actividad 1: Exploración de dominio en expresiones** – Analizar expresiones como $f(x) = 1/(x-3)$, $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $f(x) = \log(x+4)$.
 - Puntos clave: identificar restricciones, explicar por qué se excluyen ciertos valores de x .
 - Aprendizajes: aplicar reglas de dominio, utilizar notación de intervalos.
- Actividad 2: Dominio a partir de tablas** – Dado un conjunto de pares $(x, f(x))$ con posibles valores no definidos, determinar el dominio y justificar las ausencias de valores.

- Puntos clave: interpretar la tabla, reconocer valores no dados o inválidos.

- Aprendizajes: relacionar tablas con el dominio real de la función.

3. **Actividad 3: Representación del dominio en la recta numérica** – Construir la recta de dominio para distintas funciones y señalar intervalos permitidos.

- Puntos clave: uso de paréntesis y corchetes para indicar abiertos/cerrados.

- Aprendizajes: expresar dominios con intervalos y dibujar la recta correspondiente.

Evaluación

Criterios para evaluar los objetivos de la unidad:

- Identificación correcta del dominio a partir de expresiones, con justificación de las restricciones.
- Detección adecuada del dominio a partir de tablas y/o gráficos, con uso de notación de intervalos.
- Capacidad de expresar y justificar el dominio en la recta numérica y mediante intervalos.

Unidad 2: Unidad 2: Representación gráfica de funciones reales (dominio e imagen) en el plano XY

Objetivos de Aprendizaje

- Dibujar la gráfica de una función dada por una expresión, indicando dominio e imagen en la representación gráfica.
- Leer y verificar el dominio e imagen a partir de la gráfica mostrada.
- Etiquetar ejes, escalas y puntos de interés (intersecciones con ejes, valores extremos cuando apliquen).

Contenidos Temáticos

1. Tema 1: Representación gráfica de funciones básicas

Descripción corta: trazar funciones simples y verificar dominio e imagen en la gráfica.

2. Tema 2: Lectura de dominio e imagen desde la gráfica

Descripción corta: interpretar la gráfica para deducir qué valores de x producen $f(x)$ definido y qué valores toma $f(x)$.

3. Tema 3: Etiquetado y lectura de ejes y puntos clave

Descripción corta: identificar ejes, escalas y puntos relevantes (intersecciones, ceros, asíntotas si corresponde).

Actividades

1. **Actividad 1: Trazado de gráficas a partir de expresiones** – Graficar funciones como $f(x) = x^2$, $f(x) = ?x$ y $f(x) = 1/(x-2)$, identificando dominio e imagen en la gráfica.

- Puntos clave: ajustar la escala, señalar los dominios permitidos en la gráfica.

- Aprendizajes: comprender que la gráfica es una representación visual de dominio e imagen.

2. **Actividad 2: Lectura de gráfico para deducir dominio y rango** – Analizar una gráfica dada y extraer dominio e imagen con base en la visualización.

- Puntos clave: reconocer puntos no definidos y límites de la curva.
- Aprendizajes: interpretar correctamente la información gráfica y traducirla a expresiones de dominio y rango.

3. **Actividad 3: Etiquetado de ejes y puntos clave** – Construcción y etiquetado de un plano XY para una función dada, señalando intersecciones con los ejes y valores extremos si existen.

- Puntos clave: correcta etiquetación de ejes, unidades y puntos relevantes.
- Aprendizajes: comunicación matemática precisa a partir de una gráfica.

Evaluación

Se evalúa la capacidad de representar gráficamente funciones, identificar y justificar dominio e imagen a partir de la gráfica y de la expresión, y la claridad en el etiquetado de ejes y puntos clave.

Unidad 3: Unidad 3: Resolución de problemas contextuales sobre dominio e imagen de funciones

Objetivos de Aprendizaje

- Modelar situaciones reales con funciones adecuadas y determinar su dominio e imagen.
- Justificar las decisiones sobre dominio e imagen utilizando restricciones del problema y propiedades de la función.
- Comunicar soluciones mediante lenguaje matemático claro y argumentos estructurados.

Contenidos Temáticos

1. Tema 1: Modelación de situaciones reales con funciones

Descripción corta: identificar variables, decidir la función adecuada y localizar dominio e imagen relevantes al contexto.

2. Tema 2: Restricciones y su impacto en dominio e imagen

Descripción corta: analizar limitaciones del contexto (tiempo, recursos, leyes físicas) y su efecto en la función.

3. Tema 3: Comunicación de soluciones y justificación

Descripción corta: presentar conclusiones con argumentos claros, estructurados y apoyados en la función modelada.

Actividades

1. **Actividad 1: Problema contextual de ingresos y precios** – Modelar con una función el ingreso en función del precio y determinar dominio e imagen relevantes.

- Puntos clave: identificar variables, restricciones del problema (precios positivos, demanda nula, etc.).
- Aprendizajes: aplicar modelación funcional para delimitar dominio e imagen y justificar las decisiones.

2. **Actividad 2: Razonamiento y justificación** – Presentar dos enfoques para el dominio e imagen y justificar cuál es más adecuado para el contexto.

- Puntos clave: comparar enfoques, justificar con argumentos y condiciones del enunciado.
- Aprendizajes: defensa razonada de la solución.

3. **Actividad 3: Puesta en común y retroalimentación** – Compartir soluciones, discutir errores comunes y reforzar criterios de validación.

- Puntos clave: comunicación clara y revisión por pares.
- Aprendizajes: consolidación del razonamiento y de la justificación matemática.

Evaluación

La evaluación aborda la capacidad para modelar contextos, identificar restricciones, hallar dominio e imagen y justificar las decisiones con claridad. Se emplean rúbricas de desempeño y revisión por pares.

Unidad 4: Transformaciones de funciones y efectos en dominio e imagen

Objetivos de Aprendizaje

- Identificar el efecto de traslaciones y reflexiones sobre la gráfica y su dominio/imagen.
- Analizar estiramientos y compresiones (verticales y horizontales) y su influencia en el dominio e imagen, especialmente cuando la función original tiene restricciones.
- Representar visualmente transformaciones y justificar los cambios observados en dominio e imagen.

Contenidos Temáticos

1. Tema 1: Transformaciones básicas: traslaciones y reflexiones

Descripción corta: cómo desplazar y reflejar la gráfica sin o con cambios en dominio e imagen, según el caso.

2. Tema 2: Estiramientos y compresiones

Descripción corta: efecto de multiplicar la variable o la función y su repercusión en el rango y el dominio, cuando corresponde.

3. Tema 3: Representación gráfica de transformaciones y análisis

Descripción corta: dibujo de funciones transformadas y comparación de dominio e imagen entre la función original y la transformada.

Actividades

1. **Actividad 1: Transformaciones simples de $f(x) = x^2$** – Aplicar traslaciones ($f(x-h)$), reflexiones ($f(-x)$), y comparar dominio e imagen frente a la función original.
 - Puntos clave: observar cambios en la posición de la gráfica y en posibles restricciones de dominio si existían.
 - Aprendizajes: entender que algunas transformaciones conservan dominio si este es todo el conjunto de los reales, mientras otras pueden introducir cambios cuando existen restricciones.
2. **Actividad 2: Estiramientos y compresiones** – Examinar $f(ax)$ y $f(x/a)$ para diferentes a y analizar efectos en la gráfica y en el dominio/imagen.
 - Puntos clave: cambios de escala vertical/horizontal y posibles efectos en la resolución de la gráfica.
 - Aprendizajes: comprender cómo las transformaciones multiplicativas afectan la representación y su dominio.
3. **Actividad 3: Proyecto de transformaciones** – Crear una función transformada a partir de una dada y justificar los cambios en dominio e imagen, mostrando la gráfica antes y después.
 - Puntos clave: justificar con argumentos y presentar la gráfica resultante.
 - Aprendizajes: consolidar la relación entre transformaciones y dominios/imágenes.

Evaluación

La evaluación considera la capacidad de identificar y justificar el efecto de transformaciones sobre el dominio e la imagen, y de representar gráficamente esos cambios con precisión. Se aplicarán rúbricas de desempeño y revisión de pares.