

Composición de funciones e inversas

Matemáticas | Cálculo

Descripción del Curso

Este curso de Cálculo está diseñado para estudiantes de 17 años en adelante que desean comprender y modelar cambios y magnitudes continuas en situaciones reales. A través de una secuencia de unidades, el curso combina fundamentos conceptuales con práctica guiada y uso de herramientas tecnológicas para visualizar ideas y verificar resultados. Se fomenta el desarrollo del razonamiento lógico, la comunicación matemática y la capacidad de aplicar el conocimiento en contextos de la vida diaria, la ciencia y la ingeniería. Objetivo general: dotar al estudiante de las bases del cálculo diferencial e integral, enablingando un pensamiento analítico para observar, modelar y resolver problemas que involucren variaciones y acumulaciones, y desarrollar la habilidad de justificar razonadamente las soluciones. Las unidades cubren progresivamente conceptos clave, desde la intuición de funciones y límites hasta la interpretación física y geométrica de la derivada y la integral, con énfasis en la resolución de problemas reales y en la comunicación de ideas matemáticas de forma clara. Se trabajará con herramientas como calculadoras gráficas y software educativo (por ejemplo, Desmos o GeoGebra) para favorecer la visualización de conceptos y la verificación de resultados. Unidades previstas (con enfoque en aplicación y comprensión): - Unidad 1: Fundamentos de funciones, límites y continuidad. - Unidad 2: Derivadas: definición, interpretación geométrica y técnicas básicas. - Unidad 3: Aplicaciones de la derivada: optimización, tasas de cambio y análisis de gráficos. - Unidad 4: Integrales: antiderivadas, integrales definidas y técnicas simples. - Unidad 5: Aplicaciones de la integral: cálculo de áreas, volúmenes y trabajos, con introducción a conceptos de aproximación. Metodología y evaluación: se alternan explicaciones conceptuales, resolución guiada de ejercicios y proyectos cortos. La evaluación contempla tareas regulares, pruebas cortas periódicas y un proyecto final que integre los conceptos aprendidos, con énfasis en la capacidad de justificar y comunicar soluciones.

Competencias

- Desarrolla pensamiento lógico-matemático y capacidad de abstracción para modelar situaciones reales.
- Aplica conceptos de límites, derivadas e integrales para resolver problemas prácticos en ciencia, tecnología y economía.
- Analiza problemas desde múltiples enfoques y propone soluciones eficientes y justificadas.
- Utiliza herramientas tecnológicas (calculadora gráfica, software educativo) para visualizar conceptos y verificar resultados.
- Comunica ideas y resultados matemáticos con claridad, precisión y uso de lenguaje adecuado.
- Colabora en equipo para plantear, organizar y presentar soluciones a problemas matemáticos.
- Desarrolla autonomía de estudio y capacidad de autoevaluación para continuar aprendiendo de forma independiente.

Requerimientos

- Conocimientos de álgebra básica y funciones, incluyendo manipulación de expresiones y gráficos simples.
- Interés por el razonamiento cuantitativo y la resolución de problemas.
- Calculadora científica o gráfica, y acceso a software educativo (Desmos, GeoGebra) o equivalentes.
- Conexión a Internet para recursos complementarios y prácticas en línea.
- Tiempo regular para la realización de ejercicios, tareas y revisiones de conceptos.

Unidades del Curso

Unidad 1: Unidad 1: Introducción a funciones, dominio, codominio e inversas

Objetivos de Aprendizaje

- Definir dominio y codominio de una función y distinguir entre ambos conceptos.
- Determinar si una función es inyectiva y/o sobreyectiva y, por tanto, si es biyectiva.
- Exhibir ejemplos de funciones que poseen inversa y de aquellas que no la poseen, justificando las razones.

Contenidos Temáticos

Tema 1: Dominio, codominio e inversas

1. Definición de función, dominio y codominio.
2. Relación entre inyectividad, sobreyectividad y existencia de inversa.
3. Ejemplos de funciones con y sin inversa y verificación de las condiciones.

Unidad 2: Unidad 2: Inversas de funciones lineales $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$)

Objetivos de Aprendizaje

- Derivar la fórmula explícita de la inversa de una función lineal.
- Determinar el dominio y codominio de f y de f^{-1} a partir de la recta de la función.
- Aplicar la inversa en ejercicios numéricos y verificar identidades básicas.

Contenidos Temáticos

Tema 1: Inversión de funciones lineales: fórmula y pasos

1. Uso de la sustitución y resolución de ecuaciones para despejar x en $y = ax + b$.
2. Derivación de la inversa: $f^{-1}(y) = (y - b)/a$.
3. Comprobación de que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$.

Unidad 3: Unidad 3: Inversas de funciones monótonas y preservación de la monotonía

Objetivos de Aprendizaje

- Identificar funciones monótonas y su comportamiento en $\mathbb{R}$.
- Demostrar que la inversa de una función monótona y biyectiva es monótona.
- Aplicar conceptos a problemas prácticos con funciones inversas monótonas.

Contenidos Temáticos

Tema 1: Monotonía y bijectividad

1. Definición de función monótona creciente y decreciente.
2. Relación entre monotonía e invertibilidad.
3. Ejemplos de funciones monótonas que son biyectivas y aquellas que no lo son.

Unidad 4: Unidad 4: Composición de funciones: $f \circ g$ y $g \circ f$

Objetivos de Aprendizaje

- Definir y calcular la composición de funciones en ejemplos explícitos.
- Analizar el dominio de la composición y las posibles limitaciones en el codominio.
- Interpretar el efecto de la composición sobre el dominio y el rango de las funciones involucradas.

Contenidos Temáticos

Tema 1: Definición y cálculo de $f \circ g$

1. Definición formal de la composición: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
2. Dominio de la composición: dominar las restricciones necesarias.
3. Ejemplos básicos y verificación de resultados.

Unidad 5: Unidad 5: Composición invertible: cuándo existe y cómo hallar la inversa

Objetivos de Aprendizaje

- Identificar condiciones necesarias para la invertibilidad de $f \circ g$.
- Aplicar métodos de inversión para composiciones cuando existan inversas de los componentes.
- Desarrollar habilidades de justificación y demostración de resultados.

Contenidos Temáticos

Tema 1: Condiciones para la invertibilidad de la composición

1. Cuándo $f \circ g$ puede ser invertible (inyectividad y sobreyectividad de la composición).
2. Rol de las inversas de f y g en la inversión de la composición.
3. Pequeños ejemplos que ilustren situaciones invertibles y no invertibles.

Unidad 6: Unidad 6: Problemas prácticos con inversas

Objetivos de Aprendizaje

- Modelar situaciones del mundo real con funciones inversas simples o compuestas.
- Aplicar procedimientos de inversión para obtener la entrada a partir de la salida.
- Justificar cada paso de la resolución con notación y razonamiento matemático correcto.

Contenidos Temáticos

Tema 1: Modelado y extracción de entradas

1. Selección de funciones inversas adecuadas para modelar problemas.
2. Separación entre variables y resolución de ecuaciones invertidas.
3. Validación de resultados con comprobaciones operativas.

Unidad 7: Unidad 7: Dominio, codominio y elección de restricciones

Objetivos de Aprendizaje

- Relacionar dominio y codominio con la invertibilidad de f .
- Demostrar qué sucede al restringir o ampliar el dominio respecto a la existencia de inversas.
- Resolver ejemplos donde se modifica el dominio para obtener o perder inversa.

Contenidos Temáticos

Tema 1: Dominio, codominio y invertibilidad

1. Casos en los que $f = f|_D: D \rightarrow C$ tiene inversa dependiendo del dominio D y el codominio C .
2. Ejemplos de funciones que dejan de ser invertibles al cambiar el dominio.

Unidad 8: Unidad 8: Reglas de composición e inversión: notación y demostración

Objetivos de Aprendizaje

- Recordar y aplicar la notación de composición y de inversa con precisión.
- Justificar por qué $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ cuando existen inversas y se cumplen condiciones.
- Resolver ejercicios complejos que involucren varias operaciones de composición e inversión.

Contenidos Temáticos

Tema 1: Reglas de composición

1. Propiedades básicas de la composición: asociatividad, identidad y dominio.
2. Ejemplos prácticos de composición y verificación de resultados.